



TUGAS AKHIR - SM0141501

**ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM
LINIER WAKTU DISKRIT TAK STABIL DENGAN
METODE SINGULAR PERTURBATION
APPROXIMATION**

HELISYAH NUR FADHILAH
NRP 1213 100 084

Dosen Pembimbing:
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

Halaman ini sengaja dikosongkan.



FINAL PROJECT - SM141501

**REDUCTION MODEL ANALYSIS OF UNSTABLE
DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS USING
SINGULAR PERTURBATION APPROXIMATION
METHOD**

HELISYAH NUR FADHILAH
NRP 1213 100 084

Supervisors:

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si


DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN
ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM
LINIER WAKTU DISKRIT TAK STABIL
DENGAN METODE *SINGULAR*
PERTURBATION APPROXIMATION
REDUCTION MODEL ANALYSIS OF
UNSTABLE DISCRETE-TIME LINEAR
SYSTEMS USING SINGULAR
PERTURBATION APPROXIMATION
METHOD
TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
HELISYAH NUR FADHILAH
NRP. 1213 100 084

Menyetujui,
Dosen Pembimbing II, Dosen Pembimbing I,


Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si
NIP. 19830517 200812 1 003


Dr. Didik Khushnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA-ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Januari 2017

ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT TAK STABIL DENGAN METODE *SINGULAR PERTURBATION APPROXIMATION*

Nama Mahasiswa : HELISYAH NUR FADHILAH
NRP : 1213 100 084
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstrak

Pada fenomena alam yang terjadi, tidak semua sistem merupakan sistem yang stabil. Selain itu, sistem yang terdapat di alam semesta seringkali memiliki orde yang besar. Sistem yang mempunyai orde besar lebih rumit daripada sistem yang mempunyai orde kecil. Oleh karena itu, dibutuhkan penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dimaksud reduksi model. Reduksi model hanya dapat dilakukan pada sistem stabil, sehingga untuk sistem tak stabil diperlukan proses dekomposisi untuk mendapatkan subsistem stabil yang dapat direduksi. Metode Singular Perturbation Approximation (SPA) adalah salah satu metode reduksi model. Model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol. Hasil simulasi dengan menggunakan software MATLAB R2010a didapatkan bahwa sistem tereduksi dengan SPA memiliki sifat yang sama dengan sistem awal, yaitu sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Hasil frekuensi respon antara sistem tereduksi total dengan SPA dibandingkan dengan sistem tereduksi total dengan Balanced Truncation (BT) didapatkan bahwasannya pada frekuensi rendah sistem tereduksi yang memiliki

orde kecil (variabel state yang direduksi banyak) dengan SPA cenderung sama dengan sistem awal, dibandingkan sistem tereduksi dengan BT yang cenderung berbeda.

Kata-kunci: *Reduksi model, Sistem linier tak stabil, Sistem setimbang, Singular Perturbation Approximation*

REDUCTION MODEL ANALYSIS OF UNSTABLE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS USING SINGULAR PERTURBATION APPROXIMATION METHOD

Name : HELISYAH NUR FADHILAH
NRP : 1213 100 084
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstract

In the natural phenomenon, many systems are unstable. Moreover, the systems in the universe often have large order. The system that has a large order is more complicated than the system that has a small order. Therefore, we need to simplify the order of the system without any significant errors. Simplification of this system can be done using the reduction of the model. Model reduction can only be done on the stable system, so that the unstable system needs to be decomposed to obtain a stable subsystem that can be reduced. Singular Perturbation Approximation (SPA) method is one of the model reduction method. The reduced models are obtained by taking the speed of fast mode equal to zero. According to our simulation results using MATLAB R2010a software, for reduced model having a small order (many state variables are removed) in low frequency, the model reduced using SPA is closer to the original model compared with the model reduced using Balanced Truncation (BT).

Keywords: *Reduction model, Unstable linear systems, Balanced systems, Singular Perturbation Approximation*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT TAK STABIL DENGAN METODE SINGULAR PERTURBATION APPROXIMATION"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.

4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir.
5. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, M.T selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam pengerjaan ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Allah SWT yang telah memberi rahmat, petunjuk, kekuatan, dan kesabaran dalam setiap langkah kehidupan penulis serta kepada Nabi Muhammad SAW yang senantiasa dinanti syafa'atnya di yaumul qiyamah nanti.
2. Ayah dan Ibu, kedua orang tua ku tercinta. Kakakku Ely dan adekku Dina, terima kasih atas doa, kasih sayang, dukungan, motivasi, dan segalanya yang selalu dicurahkan kepada penulis selama ini.
3. Sahabat-sahabat terbaik. Desna Yuanda, Amalia Sefi Achmada, Vicky Ananda, dan Prima Aditya. Terima kasih banyak atas segala doa, dukungan, kegilaan, keceriaan, waktu dan motivasi kalian.
5. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain dan terimakasih juga khususnya untuk Hartanto Setiawan, Muhammad Fakhrrur Rozi, dan Ivan Octaviano serta teman-teman lain yang sudah banyak membantu penulis dalam pembuatan program. Terimakasih banyak semua.
6. Teman-teman angkatan 2013, khususnya LAMBDA STI-48 terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini. Kalian keluarga kedua di kampus perjuangan ini. Terima kasih atas semangat, kerja keras dan pengorbanan kalian.

7. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	5
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Landasan Teori	8
2.2.1 Sistem Linier Waktu Diskrit	8
2.2.2 Sifat-Sifat Sistem	9
2.2.3 Gramian Keterkendalian dan	
Gramian Keteramatan	12
2.2.4 Dekomposisi Sistem Tak Stabil	13
2.2.5 Reduksi Model dengan SPA	14

BAB III	METODE PENELITIAN	19
3.1	Tahapan Penelitian	19
3.2	Diagram Alir Metodologi Penelitian	21
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	23
4.1	Sistem Awal	23
4.1.1	Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik	23
4.1.2	Keterkendalian	30
4.1.3	Keteramatan	34
4.2	Dekomposisi Sistem Tak Stabil	38
4.3	Reduksi Model dengan SPA	40
4.3.1	Sistem Setimbang	41
4.3.2	Sistem Tereduksi pada Subsistem Stabil	49
4.4	Simulasi	61
BAB V	PENUTUP	145
5.1	Kesimpulan	145
5.2	Saran	146
DAFTAR PUSTAKA		147
LAMPIRAN A	Matriks Unitary U_d	149
LAMPIRAN B	Matriks Transformasi W_d	151
LAMPIRAN C	Subsistem Tak Stabil	153
LAMPIRAN D	Sistem Tereduksi Total Orde 15	155
LAMPIRAN E	Sistem Tereduksi Total Orde 16	157
LAMPIRAN F	Sistem Tereduksi Total Orde 17	159
LAMPIRAN G	Sistem Tereduksi Total Orde 18	161
LAMPIRAN H	Sistem Tereduksi Total Orde 19	163
LAMPIRAN I	Matriks Unitary U_d (Simulasi 2)	165
LAMPIRAN J	Matriks Transformasi W_d (Simulasi 2)	167

LAMPIRAN K	Sistem Tereduksi Total Orde 10	169
LAMPIRAN L	Sistem Tereduksi Total Orde 11	171
LAMPIRAN M	Sistem Tereduksi Total Orde 12	173
LAMPIRAN N	Sistem Tereduksi Total Orde 13	175
LAMPIRAN O	Sistem Tereduksi Total Orde 14	177
LAMPIRAN P	Listing Program	179
LAMPIRAN Q	Biodata Penulis	189

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Alir Metodologi Penelitian . . .	21
Gambar 4.1	Nilai Singular Hankel	69
Gambar 4.2	Frekuensi Respon antara Subsystem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$	70
Gambar 4.3	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan SPA terhadap Output	75
Gambar 4.4	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan BT terhadap Output	76
Gambar 4.5	Error Sistem Tereduksi Orde 15	77
Gambar 4.6	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan SPA terhadap Output	81
Gambar 4.7	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan BT terhadap Output	82
Gambar 4.8	Error Sistem Tereduksi Orde 16	83
Gambar 4.9	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan SPA terhadap Output	87

Gambar 4.10 Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan BT terhadap Output	88
Gambar 4.11 Error Sistem Tereduksi Orde 17.....	89
Gambar 4.12 Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan SPA terhadap Output.....	93
Gambar 4.13 Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan BT terhadap Output	94
Gambar 4.14 Error Sistem Tereduksi Orde 18.....	95
Gambar 4.15 Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan SPA terhadap Output.....	99
Gambar 4.16 Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan BT terhadap Output	100
Gambar 4.17 Error Sistem Tereduksi Orde 19.....	101
Gambar 4.18 Nilai Singular Hankel	110
Gambar 4.19 Frekuensi Respon antara Subsisitem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$	112
Gambar 4.20 Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan SPA terhadap Output.....	116

Gambar 4.21	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan BT terhadap Output	117
Gambar 4.22	Error Sistem Tereduksi Orde 10.....	118
Gambar 4.23	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan SPA terhadap Output.....	122
Gambar 4.24	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan BT terhadap Output	123
Gambar 4.25	Error Sistem Tereduksi Orde 11.....	124
Gambar 4.26	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan SPA terhadap Output.....	128
Gambar 4.27	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan BT terhadap Output	129
Gambar 4.28	Error Sistem Tereduksi Orde 12.....	130
Gambar 4.29	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan SPA terhadap Output.....	134
Gambar 4.30	Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan BT terhadap Output	135
Gambar 4.31	Error Sistem Tereduksi Orde 13.....	136

Gambar 4.32 Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan SPA terhadap Output	140
Gambar 4.33 Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan BT terhadap Output	141
Gambar 4.34 Error Sistem Tereduksi Orde 14	142

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	62
Tabel 4.2	Nilai Eigen dari Sub Sistem Stabil	65
Tabel 4.3	Nilai Eigen dari Sub Sistem Tak Stabil ..	66
Tabel 4.4	Nilai Singular Hankel	68
Tabel 4.5	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	69
Tabel 4.6	Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Simulasi 1	71
Tabel 4.7	Syarat Orde Tereduksi dengan BT Simulasi 1	71
Tabel 4.8	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 2	72
Tabel 4.9	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 15	74
Tabel 4.10	Error dari Sistem Tereduksi Orde 15	77
Tabel 4.11	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 3	78
Tabel 4.12	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 16 .	80
Tabel 4.13	Error dari Sistem Tereduksi Orde 16	83
Tabel 4.14	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4	84
Tabel 4.15	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 17	86
Tabel 4.16	Error dari Sistem Tereduksi Orde 17	89
Tabel 4.17	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5	90
Tabel 4.18	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 18	92
Tabel 4.19	Error dari Sistem Tereduksi Orde 18	95
Tabel 4.20	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6	96
Tabel 4.21	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 19	98
Tabel 4.22	Error dari Sistem Tereduksi Orde 19	101
Tabel 4.23	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	103
Tabel 4.24	Nilai Eigen dari Sub Sistem Stabil	105
Tabel 4.25	Nilai Eigen dari Sub Sistem Tak Stabil ..	107
Tabel 4.26	Nilai Singular Hankel	110

Tabel 4.27	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	111
Tabel 4.28	Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Simulasi 2	112
Tabel 4.29	Syarat Orde Tereduksi dengan BT Simulasi 2	113
Tabel 4.30	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 2	114
Tabel 4.31	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 10 .	115
Tabel 4.32	Error dari Sistem Tereduksi Orde 10	118
Tabel 4.33	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 3	119
Tabel 4.34	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 11 .	121
Tabel 4.35	Error dari Sistem Tereduksi Orde 11	124
Tabel 4.36	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4	125
Tabel 4.37	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 12 .	127
Tabel 4.38	Error dari Sistem Tereduksi Orde 12	130
Tabel 4.39	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5	131
Tabel 4.40	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 13 .	133
Tabel 4.41	Error dari Sistem Tereduksi Orde 13	136
Tabel 4.42	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6	138
Tabel 4.43	Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 14 .	139
Tabel 4.44	Error dari Sistem Tereduksi Orde 14	143
Tabel 5.1	Perbandingan Error Sitem Tereduksi Berdasarkan Orde dari Sistem Tereduksi terhadap Frekuensi Respon	146

Daftar Simbol

x_k	Variabel keadaan pada sistem diskrit.
u_k	Vektor masukan pada sistem diskrit.
y_k	Vektor keluaran pada sistem diskrit.
A, B, C, D	Matriks-matriks konstan sistem diskrit dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan matriks A non singular.
λ	Nilai eigen.
M_c	Matriks keterkendalian.
M_o	Matriks keteramatan.
A_s, B_s, C_s, D_s	Sistem stabil asimtotik, terkendali, teramati.
W	Gramian keterkendalian.
M	Gramian keteramatan.
U_d	Transformasi matriks unitary dekomposisi.
W_d	Transformasi matriks tahap kedua dekomposisi.
G_d	Hasil dekomposisi sistem tak stabil.
G_s	Subsistem stabil.
G_u	Subsistem tak stabil.
T	Matriks transformasi non singular.
Σ	Gramian kesetimbangan.
$\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$	Sistem setimbang waktu diskrit.
\tilde{W}	Gramian keterkendalian sistem $\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$.
\tilde{M}	Gramian keteramatan sistem $\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$.
σ_i	Nilai singular Hankel.
\tilde{x}_{rk}	Variabel keadaan sistem tereduksi.
\tilde{u}_{rk}	Vektor masukan pada sistem tereduksi.
\tilde{y}_{rk}	Vektor keluaran sistem tereduksi.
$\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$	Sistem tereduksi dengan SPA.
$\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$	Sistem tereduksi total dengan SPA.
$\tilde{A}_{rs}, \tilde{B}_{rs}, \tilde{C}_{rs}, \tilde{D}_{rs}$	Sistem tereduksi total dengan BT.
$ \cdot $	Nilai absolut

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang akan diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini dunia sains dan teknik semakin berkembang, permasalahan yang muncul pun semakin banyak. Saat ini matematika memiliki peran yang cukup penting dalam menyelesaikan permasalahan yang ada. Salah satunya dengan menggunakan pemodelan matematika. Pemodelan matematika digunakan untuk merepresentasikan permasalahan tersebut untuk diselesaikan. Model adalah alat yang berguna untuk menganalisis maupun merancang sistem. Sistem merupakan suatu kombinasi dari beberapa komponen yang bekerja bersama-sama untuk mendapatkan tujuan tertentu. Suatu sistem memiliki masukan, proses, dan keluaran. Masukan dan keluaran sistem yang disajikan oleh *signal* atau fungsi dari waktu bisa merupakan waktu yang kontinu atau diskrit. Analisis sistem waktu diskrit memiliki sifat yang sama seperti waktu kontinu. Pada kedua sistem tersebut dapat dilakukan analisis pada sistem mengenai kestabilannya. Dari analisis tersebut terlihat bahwa terdapat sistem yang stabil dan tidak stabil.

Pada fenomena alam yang terjadi, tidak semua sistem

merupakan sistem yang stabil. Selain itu, sistem yang terdapat di alam semesta seringkali memiliki orde yang besar. Sehingga dihasilkan model matematika yang memiliki banyak variabel keadaan (*state*). Semakin banyak variabel yang digunakan, model matematika tersebut akan semakin mendekati nilai fenomena ataupun sistem nyata yang sebenarnya. Tentunya hal ini mempengaruhi waktu komputasi karena semakin besar ukuran sistem, waktu komputasi yang dibutuhkan semakin lama pula. Sistem yang mempunyai orde besar lebih rumit daripada sistem yang mempunyai orde kecil. Oleh karena itu, dibutuhkan penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dimaksud reduksi model[1].

Saat ini telah banyak dikembangkan beberapa metode reduksi model, diantaranya adalah metode aproksimasi perturbasi singular (*Singular Perturbation Approximation/SPA*). Pada model tereduksi dengan metode SPA, semua variabel keadaan dari sistem setimbang dipartisi menjadi mode cepat dan lambat, variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil didefinisikan sebagai mode cepat, sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat. Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol.

Reduksi model dengan metode SPA dibahas oleh Rochmah, Fatmawati dan Purwati[2] yang membahas mengenai reduksi model sistem linier waktu diskrit dengan metode SPA dan menerapkannya pada masalah konduksi panas yang merupakan sistem stabil. Model tereduksi dengan menggunakan metode SPA pada sistem linier juga telah dikaji

oleh beberapa peneliti. Muscato, Nunnari dan Fortuna[3] meneliti tentang reduksi model dengan pendekatan SPA pada sistem yang terbatas di nilai real. Sedangkan Liu dan Anderson[4] meneliti tentang hubungan antara metode SPA dan metode pemotongan langsung dalam model tereduksi baik dalam sistem linier waktu kontinu maupun waktu diskrit.

Salah satu permasalahan mengenai reduksi model pada sistem waktu diskrit tak stabil dibahas oleh Deepak Kumar dkk[5]. Deepak Kumar membahas mengenai reduksi model pada sistem waktu diskrit tak stabil dengan pendekatan Norm Hankel. Pada sistem tak stabil Deepak Kumar melakukan pemisahan antara sistem stabil dan sistem tak stabil dengan algoritma dekomposisi. Selanjutnya pada sistem stabil hasil dekomposisi dilakukan adanya reduksi model dengan pendekatan Norm Hankel. Model akhir berupa penambahan sistem tak stabil hasil dekomposisi dan sistem stabil hasil reduksi model dengan pendekatan norm hankel. Diperoleh bahwa reduksi model dengan pendekatan norm hankel (*Hankel Norm Approximation*) dapat dilakukan pada sistem waktu diskrit tak stabil. Dalam penyelesaian reduksi model pada sistem tak stabil berbeda dengan penyelesaian sistem stabil. Oleh karena itu, perlu adanya kajian khusus mengenai reduksi model pada sistem tak stabil.

Berdasarkan latar belakang di atas, pada Tugas Akhir ini dilakukan analisis reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan menggunakan metode SPA. Setelah didapatkan model tereduksi, kemudian akan dilakukan analisis terhadap sifat-sifat sistem tereduksi. Setelah itu akan dilakukan simulasi untuk sistem awal dan sistem tereduksi dengan menggunakan *software* MATLAB R2010a.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang diselesaikan dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana analisis sifat sistem tereduksi pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan metode SPA?
2. Bagaimana perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dan sistem tereduksi dengan metode SPA?
3. Bagaimana perbandingan error sistem tereduksi antara metode SPA dan BT?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Sistem yang digunakan adalah sistem linier waktu invarian.
2. Sistem dengan nilai eigen sama dengan 1 tidak dibahas.
3. Multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometri.
4. Sifat sistem yang dibahas adalah kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.
5. Software yang digunakan adalah MATLAB R2010a.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat model yang diperoleh dari sistem tereduksi pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan metode SPA.

2. Mengetahui perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dan sistem tereduksi dengan metode SPA.
3. Mengetahui perbandingan error sistem tereduksi antara metode SPA dan BT.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.
2. Memberikan informasi mengenai penerapan reduksi model pada model matematika yang memiliki orde besar sehingga dapat mempermudah penghitungan dan analisis.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, sistem linier waktu diskrit beserta analisis sifat-sifat pada sistem dan metode untuk mereduksi model pada sistem.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan

dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan secara detail mengenai sifat-sifat sistem, dekomposisi sistem tak stabil, pembentukan sistem setimbang dan analisisnya, pembentukan sistem tereduksi dan analisisnya, serta simulasi.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, sistem linier waktu diskrit beserta analisis sifat-sifat pada sistem dan metode untuk mereduksi model pada sistem.

2.1 Penelitian Terdahulu

Masalah waktu komputasi sangat dipengaruhi oleh besarnya ukuran sistem. Semakin besar ukuran sistem, maka semakin besar pula waktu komputasi yang dibutuhkan. Oleh karena itu, didalam aplikasi sangat diperlukan untuk menyederhanakan suatu sistem yaitu dengan cara membentuk sistem yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Modifikasi untuk mengganti sistem yang berukuran besar dengan dengan sistem yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan disebut dengan reduksi model. Gregoriadis membahas syarat perlu dan cukup untuk eksistensi solusi permasalahan model reduksi untuk waktu kontinu dan diskrit[1].

Pada tahun 2015, telah dilakukan penelitian reduksi model sistem linier waktu diskrit dengan metode aproksimasi perturbasi singular (*Singular Perturbation Approximation/SPA*) dan menerapkannya pada masalah konduksi panas. Sistem yang akan di reduksi merupakan sistem yang stabil asimtotik terkendali dan teramati. Dari hasil penelitian tersebut dihasilkan model tereduksi yang stabil asimtotik. Pada frekuensi rendah respon frekuensi

sistem awal berorde penuh cenderung sama dengan respon frekuensi sistem yang telah direduksi, sedangkan pada frekuensi tinggi cenderung berbeda[2].

Pada tahun 2016, telah dilakukan penelitian tentang analisis reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan metode pemotongan setimbang (*Balanced Truncation*/BT). Sistem dibuat secara sebarang sehingga menghasilkan sistem yang tak stabil. Hasil simulasi dari frekuensi response antara sistem awal dan sistem tereduksi, terlihat bahwa karakteristik sistem awal dan sistem tereduksi hampir menunjukkan kesamaan dan dari perbandingan error antara sistem awal dan sistem tereduksi terlihat bahwa semakin kecil variabel yang direduksi akan memiliki error semakin kecil[6].

Pada Tugas Akhir ini akan dibahas tentang analisis reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan metode SPA.

2.2 Landasan Teori

2.2.1 Sistem Linier Waktu Diskrit

Diberikan suatu sistem linear waktu diskrit sebagai berikut:[7]

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dengan,

$x_k \in \mathbb{R}^n$:variabel keadaan pada waktu k,

$u_k \in \mathbb{R}^m$:vektor masukan deterministik pada waktu k,

$y_k \in \mathbb{R}^m$:vektor keluaran pada waktu k,

Sistem (A, B, C, D) dapat dinyatakan sesuai Persamaan (2.2.1). A, B, C, D masing-masing adalah matriks-matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan A

merupakan matriks non singular.

Fungsi transfer dari sistem (A, B, C, D) dinotasikan $G(z)$ dan didefinisikan sebagai berikut:[7]

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Sifat-Sifat Sistem

Sifat-sifat dari suatu sistem meliputi tiga hal, diantaranya kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik

Definisi 2.2.1. [7]

Diberikan sistem linear diskrit sesuai dengan Persamaan (2.2.1), dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan pada waktu k dan A adalah matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian. Misalkan x_e disebut titik setimbang.

- i. Titik setimbang x_e dikatakan stabil bila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ maka berlaku $\|x_k - x_e\| \leq \varepsilon$ untuk setiap $k \geq 0$.
- ii. Titik setimbang x_e dikatakan stabil asimtotik jika x_e stabil dan bila terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta_1$ maka berlaku $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_e\| = 0$.

Berdasarkan Definisi 2.2.1 untuk menyelidiki kestabilan sistem (A, B, C, D) , maka syarat kestabilan sistem dapat ditentukan seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.2.1. [7]

Sistem linear diskrit, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (2.2.1), adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i(A)| < 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $\lambda_i(A)$ adalah nilai eigen matriks A . Sedangkan jika $|\lambda_i(A)| \leq 1$, maka sistem diskrit adalah stabil.

Keterkendalian

Diberikan suatu sistem diskrit yang dapat dinyatakan dalam bentuk:[7]

$$x((k+1)N) = Ax(kN) + Bu(kN) \quad (2.2.3)$$

dengan,

$x(kN)$:vektor keadaan berukuran $n \times 1$ pada saat waktu k sampling,

$u(kN)$:vektor masukan pada saat waktu k sampling,

A :matriks non singular berukuran $n \times n$,

B :matriks berukuran $n \times 1$,

N :periode sampling,

Diasumsikan $u(t) = u(kN)$ adalah konstan untuk $kN \leq t < (k+1)N$. Keadaan awal diambil sebarang, sedangkan keadaan akhirnya adalah titik asal. Pengertian keterkendalian sistem diskrit diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.2.2. [7]

Sistem diskrit seperti yang diberikan pada Persamaan (2.2.3) adalah terkendali jika terdapat potongan konstan dari vektor masukan $u(kN)$ yang didefinisikan atas bilangan berhingga dari periode sampling $0 \leq kN < nN$, sedemikian sehingga, mulai dari setiap keadaan awal $x(kN)$ dapat ditranfer atau dibuat nol untuk $kN \geq nN$ pada keadaan $x_f = x(nN)$ dalam n periode sampling. Jika setiap keadaan adalah terkendali, maka sistem disebut terkendali.

Berdasarkan Definisi 2.2.2 tersebut, maka sistem diskrit dapat dikatakan terkendali jika dimulai dari sembarang state awal dapat dibawa ke sembarang state akhir dengan diberikan

kendali u berhingga dan dalam waktu berhingga. Selanjutnya untuk syarat-syarat keterkendalian sistem diskrit diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2.2. [7]

Diberikan matriks keterkendalian M_c sebagai berikut:

$$M_c = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Sistem diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.2.3) terkendali jika dan hanya jika rank dari matriks keterkendalian M_c adalah sama dengan n .

Keteramatan

Diberikan suatu sistem diskrit yang dapat dinyatakan dalam bentuk:[7]

$$\begin{cases} x((k+1)N) &= Ax(kN) \\ y(kN) &= Cx(kN) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

dengan,

$x(kN)$:vektor keadaan berukuran $n \times 1$ pada saat waktu k sampling,

$y(kN)$:vektor keluaran berukuran $m \times 1$ pada saat waktu k sampling,

A :matriks non singular berukuran $n \times n$,

C :matriks berukuran $m \times n$,

N :periode sampling,

Definisi 2.2.3. [7]

Sistem pada Persamaan (2.2.4) dikatakan teramati jika setiap keadaan awal $x(0)$ dapat ditentukan dari pengamatan $y(kN)$ selama selang waktu yang terhingga. Oleh karena itu, suatu sistem teramati jika setiap transisi keadaannya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

Berdasarkan Definisi 2.2.3, Keteramatan berarti bahwa untuk pengamatan $y(0), y(N), y(2N), \dots, y(PN)$ dengan $P = n - 1$ harus dapat menentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Sehingga syarat perlu dan cukup dari keteramatan dapat diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2.3. [7]

Diberikan matriks keteramatan M_o sebagai berikut:

$$M_o = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$$

Sistem diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.2.4) teramati jika dan hanya jika rank dari matriks keteramatan M_o adalah sama dengan n .

2.2.3 Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Diberikan sistem linier diskrit sebagai sistem (A, B, C, D) . Pada sistem (A, B, C, D) juga didefinisikan gramian keterkendalian W , dan gramian keteramatan M , yaitu:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k \quad (2.2.5)$$

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \quad (2.2.6)$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan gramian keterkendalian W , dan

gramian ketermatan M , dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.4. [8]

Diberikan sistem (A, B, C, D) yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian W , dan gramian ketereamatan M , masing-masing merupakan penyelesaian tunggal dan definit positif dari persamaan Lyapunov

$$AWA^T + BB^T - W = 0 \quad (2.2.7)$$

$$A^TMA + C^TC - M = 0 \quad (2.2.8)$$

Pada Teorema 2.2.4 sistem (A, B, C, D) yang stabil dimaksud adalah sistem stabil asimtotik. Sehingga, sistem (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.

2.2.4 Dekomposisi Sistem Tak Stabil

Dekomposisi sistem tak stabil merupakan metode pemisahan antara subsistem stabil dan tak stabil. Algoritma dekomposisi dapat dilakukan dengan dua tahap transformasi. Pada tahap pertama, transformasi real Schur bentuk blok. Menggunakan matriks Unitary U_d dalam bentuk blok diagonal atas Schur, sehingga nilai-nilai eigen dari transformasi sistem diatur berdasarkan urutan nilai absolut dari nilai eigennya. Jika x sistem awal dan U_d transformasi matriks unitary, maka x_t hasil dari transformasi sistem dengan $x = U_dx_t$.

Pada transformasi tahap kedua, dilakukan dengan menyelesaikan persamaan umum Lyapunov dan melanjutkan untuk transformasi tahap kedua menggunakan transformasi $x_t = W_dx_d$, dimana x_d adalah tahap akhir dari transformasi variabel keadaan dan W_d adalah tahap akhir dari transformasi matriks. Sehingga akan diperoleh pemisahan antara subsistem stabil dan tak stabil[9]. Dari dekomposisi ini akan

menghasilkan subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) .

2.2.5 Reduksi Model dengan SPA

Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan, atau dengan kata lain error terhadap sistem awal (A, B, C, D) kecil. Reduksi model dapat dilakukan dengan beberapa metode, salah satunya dengan menggunakan metode SPA. Reduksi model dengan metode SPA, diawali dengan cara membentuk sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem baru yang diperoleh dari sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} yang sama dan merupakan matriks diagonal Σ . Sistem setimbang diperoleh dengan mentransformasikan sistem awal terhadap matriks transformasi T :
didapatkan,

$$\tilde{A}_s = T^{-1}A_sT, \tilde{B}_s = T^{-1}B_s, \tilde{C}_s = C_sT, \tilde{D}_s = D_s$$

Sistem setimbang dari (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s\tilde{x}_k + \tilde{B}_s\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_s\tilde{x}_k + \tilde{D}_s\tilde{u}_k \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Untuk selanjutnya sistem setimbang ini disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Hubungan antara sistem setimbang dengan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem, dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.2.4. [8]

Sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ disebut sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) jika sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ mempunyai gramian keterkendalian \tilde{W} , dan gramian keteramatan \tilde{M} , yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$\tilde{A}_s \tilde{W} \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T - \tilde{W} = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{A}_s^T \tilde{M} \tilde{A}_s + \tilde{C}_s^T \tilde{C}_s - \tilde{M} = 0 \quad (2.2.11)$$

Sedemikian sehingga memenuhi

$$\begin{aligned} \tilde{W} = \tilde{M} = \sum = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \\ , \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n > 0. \end{aligned}$$

dengan σ_i nilai singular *Hankel* dari sistem (A, B, C, D) yang dapat didefinisikan sebagai

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan λ_i adalah nilai-nilai eigen dari gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M .

Metode Reduksi Model dengan SPA

Pada reduksi model dengan metode SPA, semua variabel keadaan pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dipartisi menjadi mode cepat dan lambat. Sebelum melakukan reduksi model pada suatu sistem, sistem tersebut harus memenuhi sifat-sifat sistem. Sifat-sifat yang dimaksudkan adalah sifat stabil asimtotik, terkendali, dan teramati. Ketiga sifat tersebut dibutuhkan untuk dapat memperoleh nilai singular *Hankel* yang mana merupakan representasi dari variabel keadaan yang akan direduksi dan tidak. Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular *Hankel* kecil didefinisikan sebagai mode cepat, sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai

singular *Hankel* yang lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat. Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol. Selanjutnya, pada sistem yang telah direduksi dengan metode SPA, sifat kestabilan yang berlaku pada sistem semula juga berlaku pada sistem yang telah direduksi.

Setelah diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dengan gramian keterkendalian dan keteramatan yang sama dengan gramian kesetimbangan Σ , selanjutnya sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dipartisi sesuai dengan gramian kesetimbangan $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ dengan $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ dan $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n)$ dengan demikian, realisasi sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u(k) \quad (2.2.12)$$

$$\tilde{y}(k) = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{pmatrix} + \tilde{D}u(k) \quad (2.2.13)$$

Dengan $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^r$ dan $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ bersesuaian dengan gramian Σ_1 , dan $\tilde{x}_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$ bersesuaian dengan Σ_2 .

Langkah selanjutnya, mengambil $\tilde{x}_2(k+1) = 0$, sehingga diperoleh model tereduksi yang berukuran r yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{r_{k+1}} &= \tilde{A}_{sr} \tilde{x}_k + \tilde{B}_{sr} \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_{r_k} &= \tilde{C}_{sr} \tilde{x}_k + \tilde{D}_{sr} \tilde{u}_k \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Untuk selanjutnya sistem tereduksi ini disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Adapun teorema kestabilan model tereduksi dengan metode SPA diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.2.5. [2]

Jika sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil

asimtotik, maka model tereduksi dengan metode SPA $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ juga merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Dari model tereduksi dengan metode SPA pada sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati berorde n dihasilkan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ berorde $r < n$ yang stabil asimtotik.

Teorema 2.2.6. [10]

Diberikan sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang stabil asimtotik, terkendali, teramati dan setimbang dengan Gramian $\tilde{W} = \tilde{M} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_n > 0$ jika $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ maka sistem tereduksi dengan orde r juga akan stabil asimtotik, terkendali dan teramati serta memenuhi $\|G_s - G_{sr}\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$, dengan G_s dan G_{sr} masing-masing adalah fungsi transfer sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dan sistem tereduksinya.

Setelah didapatkan sistem tereduksi seperti pada Persamaan (2.2.14) yang memenuhi **Teorema 2.2.6** maka reduksi model pada sistem tak stabil dapat diperoleh sebagai berikut.

$$G_r = G_{sr} + G_u \quad (2.2.15)$$

dengan :

G_r :Sistem tereduksi total dengan SPA

G_{sr} :Sistem tereduksi dengan SPA

G_u :Sub sistem tak stabil hasil dekomposisi

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Penelitian

a. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan cara mencari referensi yang menunjang penelitian.

b. Analisis Sifat Sistem Awal

Setelah tahap studi literatur, tahap kedua yang dilakukan adalah analisis model awal sistem. Analisis yang dimaksud meliputi analisis sifat dan perilaku sistem. Seperti analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan pada sistem tersebut.

c. Sistem Tak Stabil

Setelah sistem awal di analisis, dapat dilihat dari nilai eigennya bahwa sistem awal merupakan sistem yang tak stabil.

d. Dekomposisi Sistem Tak Stabil

Tahap ini dilakukan dengan melakukan pemisahan dari sistem yang tak stabil sehingga diperoleh subsistem stabil dan subsistem tak stabil.

e. Reduksi Model dengan SPA

Pada tahap ini dilakukan reduksi model subsistem stabil dengan menggunakan metode SPA agar menghasilkan model dengan *steady-state* yang jumlahnya lebih sedikit dan sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan yang berlaku pada sistem semula juga berlaku pada sistem yang telah direduksi.

f. Sistem Tereduksi Total

Tahap ini merupakan penggabungan antara subsistem stabil yang telah direduksi dengan subsistem tak stabil.

g. Analisis Sifat Sistem Tereduksi Total

Pada tahap ini dilakukan analisis sifat model yang telah direduksi. Analisis yang dilakukan berupa analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Analisis sistem tereduksi dilakukan untuk melihat apakah sifat-sifat sistem tereduksi sama dengan sifat-sifat model awal atau tidak.

h. Simulasi

Tahap ini dilakukan dengan mengambil contoh sistem tak stabil dengan melakukan metode dari reduksi model sehingga diperoleh model akhir. Sehingga dapat dilakukan simulasi MATLAB R2010a untuk mendapatkan hasil optimal.

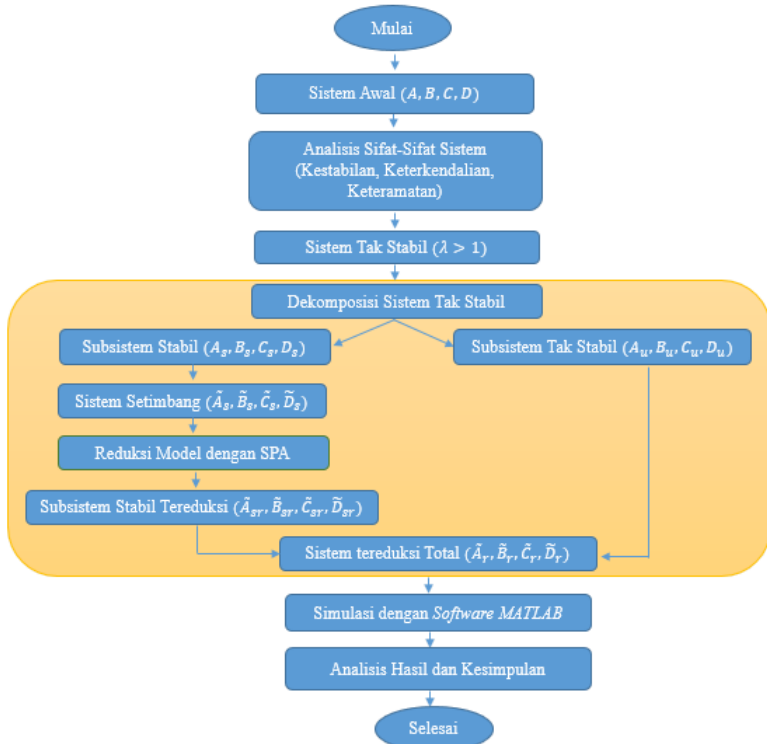
i. Analisis Hasil dan Kesimpulan

Pada tahap ini, berdasarkan hasil yang didapatkan pada tahap sebelumnya, akan ditarik kesimpulan. Apakah reduksi model menggunakan metode SPA pada pengaplikasiannya optimal.

j. Penyusunan Laporan Hasil Penelitian

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan berdasarkan hasil analisis dan penelitian.

3.2 Diagram Alir Metodologi Penelitian



Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

Keterangan

: Proses reduksi model pada sistem tak stabil

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan secara detail mengenai sifat-sifat sistem, dekomposisi sistem tak stabil, pembentukan sistem setimbang dan analisisnya, pembentukan sistem tereduksi dan analisisnya, serta simulasi.

4.1 Sistem Awal

Sistem awal yang digunakan pada pembahasan ini adalah sistem linier waktu diskrit. Pada sistem linier waktu diskrit seperti pada Persamaan (2.2.1) akan dilakukan analisis sifat sistem, meliputi sifat kestabilan, sifat keterkendalian, dan sifat keteramatan.

4.1.1 Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik

Seperti halnya dengan sistem kontinu, untuk melihat kestabilan dari sistem diskrit juga dilihat berdasarkan penyelesaian dari sistem tersebut. Sistem diskrit pada Persamaan (2.2.1) dapat ditulis sebagai.

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (4.1.1)$$

Dengan menggunakan metode rekursi:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) \\ x(2) &= Ax(1) = A^2x(0) \\ &\vdots \\ x(k) &= A^kx(0) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Pandang Persamaan (4.1.2), penyelesaian $x(k)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi $x(0)$, yaitu:

$$x(k) = \Phi(k)x(0)$$

dengan $\Phi(k) = A^k$

dengan melakukan transformasi z pada kedua ruas dari Persamaan (4.1.1), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= AX(z) \\ zX(z) - AX(z) &= zx(0) \\ (zI - A)X(z) &= zx(0) \\ (zI - A)^{-1}(zI - A)X(z) &= (zI - A)^{-1}[zx(0)] \\ X(z) &= (zI - A)^{-1}zx(0) \end{aligned}$$

dengan $X(z) = Z[x(k)]$

Selanjutnya dengan membalik transformasi z , diperoleh:

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]x(0)$$

atau dapat dituliskan kembali sebagai

$$\Phi(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$$

dengan $\Phi(k)$ adalah matriks transisi. Sehingga pada Persamaan (4.1.1), mempunyai penyelesaian:

$$x(k) = \Phi(k)x(0)$$

dengan $\Phi(k)$ yang disebut sebagai matriks transisi dan $\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$

Karena nilai $x(0)$ adalah konstan, maka nilai dari penyelesaian $x(k)$ bergantung pada $\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$ dengan A adalah matriks bujur sangkar sembarang berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ untuk $(k \leq n)$. Sehingga untuk menentukan $\Phi(k)$, maka dapat dilihat berdasarkan bentuk-bentuk dari matriks A , yaitu:

i. Jika A Adalah Matriks Diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

maka

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$ sehingga $A^k \rightarrow 0$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. mak penyelesaian dari $x(k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$. Jadi sistem stabil asimtotik jika $|\lambda_i|, i = 1, \dots, n$.

atau menggunakan rumus $\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$, maka:

$$(zI - A) = \begin{pmatrix} z - \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z - \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(z - \lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(z - \lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} \frac{z}{(z - \lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{z}{(z - \lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$$

$$\Phi(k) = Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{z}{(z-\lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{z}{(z-\lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(k) = A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Maka dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$ Sehingga $A^k \rightarrow 0$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. Penyelesaiannya adalah $x(k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$. Jadi sistem asimtotik jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Selanjutnya akan ditinjau bagaimana analisis sifat kestabilan untuk nilai $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$ jika matriks A adalah matriks diagonal.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$, maka $\lambda_i^k = 1$ untuk $k \rightarrow \infty$.

Sehingga $A^k = 1$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) = 1$. Jadi penyelesaian $x(k) = x(0)$ untuk $k \rightarrow \infty$. Maka sistem akan stabil.

- ii. Jika A Adalah Matriks yang Tidak Dapat Didiagonalkan
Jika matriks A tidak dapat didiagonalkan, maka akan dibawa ke dalam bentuk Jordan. Salah satu penyebab sebuah matriks tidak dapat didiagonalkan

adalah multiplisitas geometri (dimensi dari ruang eigen) lebih kecil dari multiplisitas aljabarnya (jumlah nilai eigen λ yang sama).

$$A = TJT^{-1}$$

dari bentuk Jordan di atas, akan didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = (TJT^{-1})(TJT^{-1}) = TJ^2T^{-1} \\ A^3 &= A^2A = (TJ^2T^{-1})(TJT^{-1}) = TJ^3T^{-1} \\ &\vdots \\ A^k &= TJ^kT^{-1} \end{aligned}$$

Selanjutnya, Suatu blok Jordan J_i adalah matriks segitiga atas $k \times k$ dengan bentuk:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

maka

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n^k \end{pmatrix}$$

dan

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k^{d_i j-1}}{(d_i j-1)!}\lambda_i^{k-d_i j} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Maka dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$ Sehingga $A^k \rightarrow 0$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. Penyelesaiannya adalah $x(k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$. Jadi sistem asimtotik jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Selanjutnya akan ditinjau bagaimana analisis sifat kestabilan untuk nilai $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$ jika matriks A adalah matriks yang tidak dapat didiagonalkan.

$$A^k = T J^k T^{-1}$$

Selanjutnya, seperti yang diketahui bahwa bentuk Jordan dalam matriks adalah sebagai berikut:

$$A^k = T J^k T^{-1}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n^k \end{pmatrix}$$

dan

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k^{d_{ij}-1}}{(d_{ij}-1)!}\lambda_i^{k-d_{ij}} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Jadi dapat dilihat jika $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$, maka

$$J_i^k = \begin{pmatrix} 1^k & k1^{k-1} & \frac{1}{2!}k^21^{k-2} & \cdots & \frac{k^{d_{ij}-1}}{(d_{ij}-1)!}1^{k-d_{ij}} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^21^{k-2} \\ & & & \ddots & k1^{k-1} \\ 0 & & & & 1^k \end{pmatrix}$$

$$J_i^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2!}k^2 & \cdots & \frac{k^{d_{ij}-1}}{(d_{ij}-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2 \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$, maka

$\lambda_i^k = 1$ untuk $k \rightarrow \infty$.

Sehingga $A^k = 1$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) = 1$.

Jadi penyelesaian $x(k) = x(0)$ untuk $k \rightarrow \infty$. Maka sistem akan stabil.

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan sistem dengan gramian keterkendalian W serta gramian keteramatan M dapat dinyatakan pada **Teorema 2.2.4**. Pada **Teorema 2.2.4** menjelaskan bahwa sifat kestabilan sistem diperlukan untuk menjamin solusi Lyapunov ada, sifat keterkendalian sistem diperlukan untuk menjamin gramian keterkendalian definit positif dan sistem keteramatan sistem diperlukna juga untuk menjamin bahwa gramian keteramatan adalah definit positif.

4.1.2 Keterkendalian

Sistem dikatakan terkendali jika dimulai dari nilai awal sebarang dan dapat dipindahkan ke sebarang state yang diinginkan dengan suatu kendali dan dalam waktu berhingga. Diasumsikan $u(t) = u(kN)$ adalah konstan untuk $kN \leq t < (k+1)N$ dan keadaan awalnya adalah sebarang, sedangkan keadaan akhirnya adalah titik asal ruang keadaan.

Sistem kendali yang diberikan pada Persamaan (2.2.3) adalah terkendali jika terdapat potongan konstan dari sinyal kendali $u(kN)$ yang didefinisikan atas bilangan berhingga dari periode sampling, $0 \leq kN < nN$, sedemikian sehingga, mulai dari setiap state awal $x(kN)$ dapat ditransfer atau dijadikan sama dengan nol untuk $kN \leq nN$ pada awal state x_f dalam n periode sampling. Jika setiap keadaan adalah terkendali, maka sistem tersebut disebut sebagai sistem yang terkendali. Penyelesaian Persamaan (2.2.3) adalah:

$$x(nN) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-i-j} Bu(jN) \quad (4.1.3)$$

$$x(nN) =$$

$$A^n x(0) + A^{n-1} Bu(0) + A^{n-2} Bu(N) + \dots + Bu((n-1)N)$$

Sehingga diperoleh:

$$x(nN) - A^n x(0) = A^{n-1}Bu(0) + A^{n-2}Bu(N) + \dots + Bu((n-1)N)$$

$$x(nN) - A^n x(0) =$$

$$\begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u((n-1)N) \\ u((n-2)N) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

Karena B adalah matriks berukuran $nx1$, maka masing-masing dari matriks $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ adalah matriks berukuran $nx1$ atau vektor kolom. Jika sistem tersebut terkendali, maka mulai dari titik sebarang $x(0)$, dapat dibuat keadaan tersebut menuju suatu titik dimana $x(kN) = 0$ untuk $k \leq n$ dengan memberikan signal atau fungsi $u(0), u(T), \dots, u((n-1)N)$. Jadi jika $x(kN) = 0$ maka dari Persamaan (4.1.3) dapat diperoleh:

$$A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-i-j} Bu(jN) = 0$$

atau

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} Bu(jN) = 0 \\ &= -(A^{-1}Bu(0) + A^{-2}Bu(N) + \dots + A^{-n}Bu((n-1)N) \end{aligned}$$

Karena A adalah matriks non singular yang berukuran $nx1$, maka $A^{-1}B, A^{-2}B, \dots, A^{-n}B$ adalah matriks $nx1$, yaitu:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, A^{-2}B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, A^{-n}B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk n persamaan aljabar simultan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a_{11}u(0) - a_{12}u(N) - \dots - a_{1n}u((n-1)N) \\ x_2(0) &= a_{21}u(0) - a_{22}u(N) - \dots - a_{2n}u((n-1)N) \\ &\vdots \\ x_n(0) &= a_{n1}u(0) - a_{n2}u(N) - \dots - a_{nn}u((n-1)N) \end{aligned}$$

Agar persamaan tersebut memiliki penyelesaian untuk setiap $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ yang telah diberikan, maka matriks $(a_{ij})_{n \times n}$ adalah bebas linier atau matriks $(a_{ij})_{n \times n}$ mempunyai *rank* sebanyak n .

Dari analisis di atas, maka dapat dinyatakan syarat keterkendalian dari sistem diskrit Persamaan (2.2.3) sebagai berikut: Keadaan sistem dinyatakan terkendali jika dan hanya jika vektor $A^{-1}B, A^{-2}B, \dots, A^{-n}B$ adalah bebas linier, atau matriks keterkendalian M_c

$$M_c = \begin{pmatrix} A^{-1}B & : & A^{-2}B & : & \dots & : & A^{-n}B \end{pmatrix}$$

atau dapat dituliskan kembali matriks M_c sebagai berikut:

$$M_c = \begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Pada matriks keterkendalian M_c mempunyai *rank* sebanyak n , yaitu: Maka dapat disimpulkan bahwa sistem yang dinyatakan seperti pada Persamaan (2.2.4), dimana $u(kN)$ adalah vektor berdimensi n , maka dapat dibuktikan bahwa keadaan sistem terkendali jika dan hanya jika *rank* dari matrik keterkendalian M_c sebanyak n .

Jika *rank* matriks keterkendalian sama dengan n , maka untuk sebarang $x(nN) = x_f$ (state yang dituju) terdapat barisan $u(0), u(N), \dots, u((n-1)N)$ yang memenuhi Persamaan (4.1.3) dan (4.1.4). Jadi *rank* penuh untuk matriks keterkendalian

adalah syarat cukup keterkendalian.

Selanjutnya akan dibuktikan syarat perlu untuk keterkendalian. Andaikan matriks keterkendalian $M_c < n$, hal ini dijamin oleh Teorema Cayley Hamilton yang berkaitan dengan matriks persegi yaitu, bila matriks persegi A berukuran $n \times n$ dengan polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

maka

$$p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$$

$p(A) = 0$, dengan $p(A)$ adalah polynomial dalam A . sehingga dapat dituliskan kembali sebagai,

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

kedua ruas dikalikan dengan B sehingga didapatkan

$$(A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_n)B = 0B$$

$$A^nB + a_1A^{n-1}B + a_2A^{n-2}B + \dots + a_nB = 0$$

Untuk sebarang i , $A^i B$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Maka untuk sebarang i akan berlaku:

$$M_c(i) = \begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{i-1}B \end{pmatrix}$$

untuk $rank M_c(i) < n$ Jadi $M_c(i)$ tidak mungkin merupakan span berdimensi n . Atau dengan kata lain, untuk beberapa x_f tidak mungkin diperoleh u yang dapat membawa $x(iN) = x_f, \forall i$. Jadi dapat disimpulkan bahwa sistem tidak terkendali jika dan hanya jika $rank$ dari matriks keterkendalian $\neq n$.

4.1.3 Keteramatan

Sistem teramati jika setiap keadaan awal $x(0)$ dapat ditentukan dari pengamatan $y(NT)$ selama selang waktu yang terhingga. Oleh karena itu, suatu sistem teramati jika setiap transisi statenya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

Konsep keteramatan berguna untuk menyelesaikan permasalahan rekonstruksi variabel state yang tidak terukur, dari variabel yang terukur dalam selang waktu yang semimum mungkin. Bagaimanapun juga dalam prakteknya masih kesulitan, karena masih adanya beberapa variabel state yang tidak dapat diukur secara langsung. Selanjutnya sangat perlu untuk mengestimasi variabel state yang tidak terukur tersebut untuk menentukan signal atau fungsi kendali optimal. Adapun alasan peninjauan sistem tanpa penggerak adalah sebagai berikut:

Jika sistem yang dinyatakan seperti pada Persamaan (2.2.1), maka penyelesaiannya adalah:

$$x(kN) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(jN) \quad (4.1.5)$$

dengan $y(kN)$ adalah:

$$y(kN) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN) \quad (4.1.6)$$

misalkan:

$$Q = \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN)$$

Karena matriks A, B, C , dan D diketahui dan $u(kN)$ juga diketahui, maka Q dan $Du(kN)$ pada ruas kanan dari Persamaan (4.1.6) merupakan besaran yang diketahui. Oleh karena itu, dapat dikurangkan pada $y(kN)$. Hal ini dapat dijelaskan berdasarkan definisi keteramatan sebagai berikut: Sistem teramati jika setiap keadaan awal $x(0)$

dapat ditentukan dari pengamatan $y(kN)$ selama waktu yang terhingga. Suatu sistem teramati jika setiap transisi statenya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

Sekarang ambil sebarang state awal x_0 dan x_1 yang menghasilkan $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u)$, maka akan diperoleh $x_0 = x_1$.

State awal x_0 menghasilkan keluaran:

$$y(t, x_0, u) = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN)$$

State awal x_1 menghasilkan keluaran:

$$y(t, x_1, u) = CA^k x_1 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN)$$

Karena $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u)$ akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN) &= \\ CA^k x_1 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN) & \\ CA^k x_0 = CA^k x_1 & \\ CA^k (x_0 - x_1) = 0 & \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa Q dan $Du(kN)$ saling menghilangkan, maka untuk penyelidikan syarat dari sifat keteramatan kita perlu meninjau sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4). Tinjau sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4). Sistem akan teramati jika diberikan keluaran $y(kN)$ selama periode cacah berhingga, mungkin dapat menentukan state awal $x(0)$. Berikut ini kan diturunkn syarat dari sifat keteramatan sistem waktu diskrit yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4). Penyelesaian dari Persamaan (2.2.4) adalah:

$$y(kN) = Cx(kN) = CA^k x(0)$$

Keteramatan berarti bahwa untuk $y(0), y(N), y(2N), \dots, y(PN)$, kita dapat menentukan

$x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Untuk menentukan n variabel yang tidak diketahui, kita hanya memerlukan n nilai $y(kN)$ yaitu untuk $P = n - 1$ atau $y(0), y(N), \dots, y((n - 1)N)$ untuk menentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Untuk suatu sistem yang teramati diberikan sebagai:

$$\begin{aligned} k = 0 &\longrightarrow y(0) = Cx(0) \\ k = 1 &\longrightarrow y(N) = CAx(0) \\ &\vdots \\ k = n - 1 &\longrightarrow y((n - 1)N) = CA^{n-1}x(0) \end{aligned}$$

Maka harus dapat menentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$.

Dengan mengingat bahwa $y(kN)$ adalah vektor berdimensi m , maka n persamaan simultan diatas akan menghasilkan nm persamaan, yang semuanya melibatkan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Hal ini dapat diterangkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(0) = Cx(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_m(0) \end{pmatrix}_{mx1} = C_{mxn} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_m(0) \end{pmatrix}_{nx1} \\ \\ y(N) = CAx(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1(N) \\ y_2(N) \\ \vdots \\ y_m(N) \end{pmatrix}_{mx1} \\ &= C_{mxn} A_{nxm} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_m(0) \end{pmatrix}_{nx1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y((n-1)N) = CA^{n-1}x(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1((n-1)N) \\ y_2((n-1)N) \\ \vdots \\ y_m((n-1)N) \end{pmatrix}_{mx1} \\
&= C_{m \times n} A_{n \times m}^{n-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_m(0) \end{pmatrix}_{nx1}
\end{aligned}$$

Sehingga dari penyelesaian diatas dapat dilihat bahwa dari persamaan n simultan diatas akan menghasilkan nm persamaan, yang semuanya melibatkan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Untuk mendapatkan penyelesaian yang tunggal dari $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ dari persamaan nm persamaan, maka kita harus dapat menulis secara tepat n persamaan yang bebas linier dari seluruh persamaan yang ada. Hal ini memerlukan persyaratan bahwa matriks $nmxn$ harus memiliki *rank* sebanyak n .

Misalkan M_o adalah matriks keteramatan dari sistem (A, B, C, D)

$$M_o = \begin{pmatrix} C \\ - - - \\ CA \\ - - - \\ \vdots \\ - - - \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Maka *rank* dari matriks keteramatan M_o adalah sebanyak n . Dengan mengingat bahwa *rank* dari suatu matriks dan *rank* dari transpose konjugasi matriks tersebut adalah sama, maka dapat kita nyatakan keteramatan sebagai berikut: Sistem

yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4) teramati jika dan hanya jika matriks $n \times n$

$$M_c^* = \begin{pmatrix} C^* & : & A^*C^* & : & \dots & : & (A^*)^{n-1}C \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

Maka transpose dari matriks keteramatan M_c^* harus mempunyai *rank* sebanyak n atau memiliki vektor kolom yang bebas linier. Matriks pada Persamaan (4.1.7) biasanya disebut dengan matriks keteramatan. Jika matriks C dan A real, kemudian tanda transpose konjugate untuk A^*C^* dapat diubah ke dalam A^TC^T .

4.2 Dekomposisi Sistem Tak Stabil

Dekomposisi sistem tak stabil merupakan metode pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tak stabil. Algoritma dekomposisi dapat dilakukan dengan dua tahap transformasi. Pada tahap pertama, transformasi real Schur bentuk blok. Pada tahap transformasi tahap kedua, dilakukan dengan menyelesaikan persamaan umum Lyapunov dan akan diperoleh pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tak stabil.

Misalkan pada Persamaan (2.2.1) merupakan sistem tak stabil. Pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tak stabil dapat dilakukan dengan cara dekomposisi. Algoritma dekomposisi terdiri dari langkah-langkah berikut:

1. Transformasi sistem pada Persamaan (2.2.1) menggunakan matriks unitary U_d dalam bentuk blok diagonal atas Schur, sehingga nilai-nilai eigen dari transformasi sistem diatur berdasarkan urutan nilai absolut dari nilai eigen-nya. Jika x sistem awal dan U_d transformasi matriks unitary, maka x_t hasil dari transformasi sistem dengan $x = U_dx_t$. Dengan demikian, tahap pertama transformasi sistem diperoleh:

$$\begin{aligned}
G_t &= \left[\begin{array}{c|c} \frac{U_d^T A U_d}{C U_d} & \frac{U_d^T B}{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_t & B_t \\ \hline C_t & D \end{array} \right] \\
&\quad \quad \quad m \quad \quad n-m \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} \overrightarrow{A_{t11}} & \overrightarrow{A_{t12}} & B_{t1} \\ 0 & A_{t22} & B_{t2} \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \downarrow m \\ \downarrow n-m \end{array} \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

Dimana n menunjukkan ukuran sistem, m menunjukkan jumlah nilai eigen stabil, dan $n-m$ menunjukkan jumlah dari nilai eigen tak stabil.

2. Transformasi sistem pada Persamaan (4.2.1) dapat dilakukan untuk pemisahan dengan menyelesaikan bentuk umum persamaan Lyapunov berikut:

$$A_{t11}S - SA_{t22} + A_{t22} = 0$$

Dengan memperoleh nilai dari S dan melanjutkan untuk transformasi tahap kedua menggunakan transformasi $x_t = W_d x_d$ dimana x_d adalah tahap akhir dari transformasi state dan W_d adalah tahap akhir dari transformasi matriks. Transformasi matriks W_d dari tahap kedua diberikan sebagai berikut:

$$W_d = \begin{pmatrix} I_m & . & S \\ \cdots & . & \cdots \\ 0 & . & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

dengan I_m adalah matriks identitas berukuran m dan I_{n-m} adalah matriks berukuran $n-m$. Sedangkan pada W_d^{-1} diberikan sebagai berikut:

$$W_d^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & . & -S \\ \cdots & . & \cdots \\ 0 & . & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Sehingga sistem dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 G_d &= \left[\begin{array}{c|c} W_d^{-1}A_tW_d & W_d^{-1}B_t \\ \hline C_tW_d & D \end{array} \right] \\
 &\quad m \quad n-m \\
 &= \left[\begin{array}{cc|c} \vec{A_s} & \vec{0} & B_s \\ 0 & A_u & B_u \\ \hline C_s & C_u & D \end{array} \right] \begin{array}{l} \downarrow m \\ \downarrow n-m \end{array} \quad (4.2.2)
 \end{aligned}$$

dengan $A_t = U_d^T A U$, $B_t = U_d^T B$ dan $C_t = C U_d$ berdasarkan pada Persamaan (4.2.2), maka diperoleh hasil dari dekomposisi adalah:

$$G_d = \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array} \right] \quad (4.2.3)$$

dengan,

$$Subsistem \text{ Stabil} = \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s \end{array} \right]$$

dan

$$Subsistem \text{ Tak Stabil} = \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_0 \end{array} \right]$$

4.3 Reduksi Model dengan SPA

Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Pada reduksi model dengan metode *Singular Perturbation Approximation*(SPA) digunakan sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Diasumsikan bahwa sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.1) merupakan sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati yang disebut

dengan sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) .

Pada sistem tak stabil, tak terkendali, dan tak teramati tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang definit positif. Sehingga pada sistem yang tak stabil perlu adanya dekomposisi sistem tak stabil atau pemisahan antara subsistem stabil dengan subsistem tak stabil. Dari hasil dekomposisi tersebut, dapat dilakukan reduksi model pada subsistem stabil dengan pembentukan sistem setimbang dan pembentukan sistem terduksi. Sehingga diperoleh reduksi model pada sistem tak stabil dengan penggabungan antara subsistem stabil dengan subsistem tak stabil dari dekomposisi.

4.3.1 Sistem Setimbang

Sistem setimbang adalah sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama, dan juga merupakan matriks diagonal. Sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) diasumsikan stabil asimtotik, terkendali, dan teramati, maka gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M masing-masing adalah definit positif. Berdasarkan **Teorema 2.2.4**, maka sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan sistem merupakan sistem dasar yang harus dipenuhi agar sistem tersebut memiliki gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M .

Konstruksi Matriks Transformasi T

Konstruksi matriks transformasi T dilakukan sedemikian sehingga gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} adalah sama dan merupakan matriks diagonal. Algoritma untuk mendapatkan matriks transformasi T tersebut adalah sebagai berikut:

1. Diberikan masukan berupa sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) yang diasumsikan stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.

2. Ditentukan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) .

Sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik, terkendali, dan teramati maka berdasarkan **Teorema 2.2.4** dijamin bahwa W dan M adalah definit positif.

Matriks W definit positif maka semua nilai eigen dari W adalah positif dan $|W| \neq 0$, artinya W juga merupakan matriks non singular. Begitu juga dengan M berlaku sama, sehingga matriks M juga merupakan matriks yang non singular.

3. Ditentukan matriks ϕ sedemikian sehingga berlaku $W = \phi^T \phi$.

Diketahui bahwa matriks W non singular, maka ϕ jelas non singular.

4. Dikonstruksikan matriks $\phi M \phi^T$ dan dilakukan diagonalisasi pada $\phi M \phi^T$ sedemikian sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$, dengan U adalah matriks Unitary (matriks yang dibangun oleh vektor eigennya) dan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sqrt{\lambda_i(WM)}$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$.

Telah diketahui bahwa matriks W, M , dan ϕ adalah matriks non singular, maka $\phi M \phi^T$ juga non singular. Dan $U \Sigma^2 U^T = \phi M \phi^T$, yang berarti bahwa $U \Sigma^2 U^T$ juga non singular.

U adalah matriks Unitary, maka berlaku $U U^T = U^T U = I$ yang berarti bahwa U dan U^T masing-masing merupakan matriks non singular.

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$, maka jelas bahwa Σ non singular dan $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ non singular.

5. Didefinisikan matriks T non singular sebagai:

$$T = \phi^2 U \Sigma^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.1)$$

Matriks $\phi, U, \Sigma^{\frac{1}{2}}$ masing-masing adalah non singular, maka hal ini merupakan jaminan bahwa matriks transformasi T adalah non singular.

Pembentukan Sistem Setimbang

Realisasi setimbang adalah realisasi yang mentransformasi suatu sistem menjadi sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan matriks diagonal. Misalkan diberikan suatu matriks transformasi T yang memenuhi:

$$x_k = T \hat{x}_k \quad (4.3.2)$$

dengan,

x_k : variabel keadaan dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s)

\tilde{x}_k : variabel keadaan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

T : matriks transformasi yang non singular dan berukuran $n \times n$

Selanjutnya, Persamaan (4.3.2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tilde{x}_k = T^{-1} x_k \quad (4.3.3)$$

untuk $k = k + 1$, maka Persamaan (4.3.3) menjadi:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1} x_{k+1} \quad (4.3.4)$$

Jika sistem awal pada Persamaan (4.3.2) dan (4.3.3) disubstitusikan pada Persamaan (4.14) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1}(A_s x_k + B_s u_k) \quad (4.3.5)$$

Selanjutnya, mensubstitusi Persamaan (4.3.2) ke dalam Persamaan (4.3.5), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= T^{-1}(A_s T x_k + B_s u_k) \\
\tilde{x}_{k+1} &= T^{-1} A_s T \tilde{x}_k + T^{-1} B_s \tilde{u}_k \\
\tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Sedangkan untuk mendapatkan matriks \tilde{C}_s dan \tilde{D}_s , dilakukan dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3.2) ke dalam Persamaan (4.3.3), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_k &= C_s T x_k + D_s u_k \\
\tilde{y}_k &= C_s (T \tilde{x}_k) + D_s \tilde{u}_k \\
\tilde{y}_k &= C_s T \tilde{x}_k + D_s \tilde{u}_k \\
\tilde{y}_k &= \tilde{C}_s T \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Sehingga didapatkan,

$$\tilde{A}_s = T^{-1} A_s T, \tilde{B}_s = T^{-1} B_s, \tilde{C}_s = C_s T, \tilde{D}_s = D_s \tag{4.3.8}$$

Dapat dituliskan kembali Persamaan (4.3.6) dan Persamaan (4.3.7) sebagai suatu sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_s \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Untuk selanjutnya sistem setimbang ini disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3.8) ke dalam Persamaan (2.2.5), yaitu:

$$W = T \tilde{W} T^T \tag{4.3.10}$$

dengan,

$$\tilde{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_s^k \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T (\tilde{A}_s^T)^k \tag{4.3.11}$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.10), maka gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk

$$\tilde{W} = T^{-1}W(T^{-1})^T \quad (4.3.12)$$

Sedangkan gramian keteramatan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3.8) ke dalam Persamaan (2.2.6), sehingga diperoleh

$$M = (T^{-1})^T \tilde{M} T^{-1} \quad (4.3.13)$$

dengan,

$$\tilde{M} = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{A}_s^T)^k \tilde{C}_s^T \tilde{C}_s \tilde{A}_s^k \quad (4.3.14)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.14), maka gramian keteramatan sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\tilde{M} = T^T \tilde{M} (T^{-1})^T \quad (4.3.15)$$

Dari hasil konstruksi matriks transformasi T , seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.3.1), maka selanjutnya akan ditinjau kembali untuk gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Berdasarkan Persamaan (4.3.1), maka gramian keterkendalian \tilde{W} , seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.3.12) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\tilde{W} = (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^{-1} W ((\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^{-1})^T = \Sigma \quad (4.3.16)$$

Sedangkan gramian keteramatan \tilde{M} , seperti yang telah dituliskan oleh Persamaan (4.3.15) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\tilde{M} = (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^T M (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}) = \Sigma \quad (4.3.17)$$

Dari Persamaan (4.3.16) dan (4.3.17) didapatkan:

$$\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma \quad (4.3.18)$$

Menurut hasil yangtelah diperoleh pada Persamaan (4.3.18) menunjukkan bahwa dengan mendefinisikan matriks T sebagai $T = \phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}$, maka dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat dibentuk suatu sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} yang sama dengan matriks diagonal Σ .

Oleh karena itu, maka sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ disebut sebagai bentuk sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) . Selanjutnya, Σ disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Berdasarkan pada Definisi 2.2.4, maka dapat dinyatakan bahwa gramian kesetimbang Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov:

$$\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T - \Sigma = 0 \quad (4.3.19)$$

$$\tilde{A}_s^T \Sigma \tilde{A}_s + \tilde{C}_s^T \tilde{C}_s - \Sigma = 0 \quad (4.3.20)$$

Sehingga sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ , yaitu:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$$

dengan,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (4.3.21)$$

Kestabilan Sistem Setimbang

Stabilitas sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditunjukkan melalui nilai eigen dari matriks \tilde{A}_s . Pada Persamaan (4.3.19) merupakan persamaan Lyapunov dari gramian kesetimbangan Σ . Dari Persamaan (4.3.19) dapat diperoleh:

$$\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T = \Sigma \quad (4.3.22)$$

Misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_s dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$v \tilde{A}_s = v \lambda \quad (4.3.23)$$

atau

$$\tilde{A}_s^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.3.24)$$

Selanjutnya, pada Persamaan (4.3.22) akan dikalikan dari kiri dengan vektor v dan kalikan dari kanan dengan vektor v^T sehingga diperoleh:

$$v(\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T) v^T = v \Sigma v^T \quad (4.3.25)$$

Dengan melakukan operasi matriks pada Persamaan (4.3.25) maka didapatkan:

$$v \tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + v \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T v^T = v \Sigma v^T \quad (4.3.26)$$

Kemudian pada Persamaan (4.36), kumpulkan semua unsur yang memuat Σ pada ruas kiri dan semua unsur yang tidak memuat Σ diletakkan pada ruas kanan, in sehingga diperoleh:

$$v \Sigma v^T - v \tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T v^T = v \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T v^T \quad (4.3.27)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.23) dan (4.3.24) ke dalam Persamaan (4.3.27), sehingga diperoleh:

$$v \Sigma v^T - v \lambda \Sigma \lambda^T v^T = v \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T v^T \quad (4.3.28)$$

Nilai λ merupakan konstanta, maka Persamaan (4.3.28) dapat ditulis menjadi:

$$(1 - |\lambda|^2)v\Sigma v^T = v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T v^T \geq 0 \quad (4.3.29)$$

Persamaan (4.3.29) hanya dipenuhi jika:

$$1 - |\lambda|^2 \geq 0$$

atau

$$|\lambda| \leq 1$$

Selanjutnya, jika diambil $|\lambda|=1$, maka dari Persamaan (4.3.29) dapat diperoleh:

$$v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T v^T = 0 \quad (4.3.30)$$

Persamaan (4.3.29) hanya dipenuhi jika:

$$v\tilde{B}_s = 0 \quad (4.3.31)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.23) maka jelas terlihat bahwa jika diambil $|\lambda|=1$ maka v merupakan vektor eigen kiri dari matriks \tilde{A}_s . Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4.3.31) maka dapat dilihat bahwa dengan mengambil $|\lambda|=1$ maka vektor v merupakan *kernel* dari \tilde{B}_s .

Sehingga berdasarkan Persamaan (4.3.23) dan (4.3.31), terlihat bahwa dengan mengambil $|\lambda|=1$ maka diperoleh v yang merupakan vektor eigen kiri dari \tilde{A}_s dan sebagai *kernel* dari \tilde{B}_s . Menurut **Teorema 2.2.1**, hal ini kontradiksi dan haruslah $|\lambda| < 1$, yang berarti bahwa haruslah nilai eigen dari \tilde{A}_s kurang dari 1. Sehingga terbukti bahwa sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian Sistem Setimbang

Keterkendalian sistem setimbang dapat ditunjukkan melalui gramian keterkendalian dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Sistem setimbang mempunyai gramian keterkendalian yang merupakan gramian kesetimbangan.

Berdasarkan Persamaan (4.3.19) dapat dilihat bahwa Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov. Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.3.21) dapat dilihat bahwa Σ adalah definit positif. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ merupakan gramian keterkendalian dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Keteramatan Sistem Setimbang

Keteramatan sistem setimbang dapat ditunjukkan melalui gramian keteramatan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Sistem setimbang mempunyai gramian keteramatan yang merupakan gramian kesetimbangan.

Berdasarkan Persamaan (4.3.20) dapat dilihat bahwa Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov. Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.3.21) dapat dilihat bahwa Σ adalah definit positif. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ merupakan gramian keteramatan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

4.3.2 Sistem Tereduksi pada Subsistem Stabil

Sistem tereduksi adalah suatu model pendekatan yang diperoleh dari proses reduksi model. Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Sistem tereduksi ini akan mempunyai perilaku atau sifat yang hampir sama dengan sistem semula.

Pembentukan Sistem Tereduksi

Pembentukan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ pada penelitian ini dengan menggunakan metode *Singular Perturbation Approximation* (SPA). Pembentukan sistem tereduksi dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) diawali dengan pembentukan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Setelah diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dengan gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} sama dengan gramian kesetimbangan Σ . Selanjutnya sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dipartisi sesuai dengan gramian $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, atau dapat dituliskan kembali sebagai.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.3.32)$$

dengan,

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n)$$

Partisi pada Σ menyebabkan terjadinya partisi pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, yaitu:

$$\tilde{G}_s = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{C}_1 & \tilde{D}_s \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{sr} \end{array} \right] \quad (4.3.33)$$

dengan,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_s = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_s = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{C}_s = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{D}_s = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{sr} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.3.34)$$

Begitupula dengan variabel keadaan pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ juga dipartisi menjadi:

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1(k+1)} \\ \tilde{x}_{2(k+2)} \end{pmatrix} \quad (4.3.35)$$

Dengan demikian berdasarkan Persamaan (4.3.35), realisasi sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u(k) \quad (4.3.36)$$

$$\tilde{y}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{pmatrix} + \tilde{D}u(k) \quad (4.3.37)$$

dengan $\tilde{x}_1(k) \in \mathbb{R}^r$ dan $\tilde{A}_{11}(k) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ bersesuaian dengan gramian Σ_1 , dan $\tilde{x}_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$ bersesuaian dengan gramian Σ_2 .

Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil didefinisikan sebagai mode cepat, sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat.

Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol atau dengan kata lain dapat dikatakan bahwa $\tilde{x}_2(k+1) = 0$ sehingga dari Persamaan (4.3.36) dan Persamaan (4.3.37) diperoleh

$$\tilde{x}_1(k+1) = \tilde{A}_{11}x_1(k) + \tilde{A}_{12}x_2(k) + \tilde{B}_1u(k) \quad (4.3.38)$$

$$0 = \tilde{A}_{21}\tilde{1}(k) + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(k) + \tilde{B}_2u(k) \quad (4.3.39)$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}_1\tilde{x}_1(k) + \tilde{C}_2\tilde{x}_2(k) + \tilde{D}u(k) \quad (4.3.40)$$

Kemudian, dengan mengasumsikan \tilde{A}_{22} adalah matriks non singular, dari Persamaan (4.3.39) didapatkan

$$\tilde{x}_2(k) = -\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}\tilde{x}_1(k) - \tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2u(k) \quad (4.3.41)$$

Selanjutnya, dengan mensubsitusikan Persamaan (4.3.41) ke dalam Persamaan (4.3.38) dan Persamaan (4.3.40). Dengan demikian, diperoleh sistem tereduksi berorde r yang bersesuaian dengan gramian Σ_1 sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1(k+1) = \tilde{A}_{sr}\tilde{x}_1(k) + \tilde{B}_{sr}u(k) \quad (4.3.42)$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}_{sr}\tilde{x}_1(k) + \tilde{D}u(k) \quad (4.3.43)$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots, n$ dengan $\tilde{x}_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $u(k) \in \mathbb{R}^s$, dan $\tilde{y}(k) \in \mathbb{R}^t$. Untuk,

$$\tilde{A}_{sr} = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$$

$$\tilde{C}_{sr} = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \tilde{D}_s - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$$

Selanjutnya, Sesuai dengan **Teorema 2.2.5**, pada sistem tereduksi $\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$ dengan metode SPA, sifat kestabilan yang berlaku pada sistem semula juga berlaku pada sistem yang telah direduksi.

Kestabilan Sistem Tereduksi

Stabilitas sistem tereduksi $\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$ dapat ditunjukkan melalui nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} . Persamaan Lyapunov dapat diperoleh dengan mensubsitusikan Persamaan (4.3.32) dan (4.3.34) ke dalam Persamaan (4.3.16) sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.44)$$

Ukuran matriks-matriks pada Persamaan (4.3.44) sudah bersesuaian, sehingga operasi matriks pada Persamaan (4.3.44) dapat menghasilkan:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.45)$$

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{21}^T + \tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{22}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_2^T = 0 \quad (4.3.46)$$

$$\tilde{A}_{21}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{22}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_2\tilde{B}_{sr}^T = 0 \quad (4.3.47)$$

$$\tilde{A}_{21}\Sigma_1\tilde{A}_{21}^T + \tilde{A}_{22}\Sigma_2\tilde{A}_{22}^T + \tilde{B}_2\tilde{B}_2^T - \Sigma_2 = 0 \quad (4.3.48)$$

Dari Persamaan (4.3.45), misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kiri yang berkaitan dengan λ , yang berarti dapat dituliskan kembali sebagai

$$v\tilde{A}_{sr} = v\lambda \quad (4.3.49)$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.3.50)$$

Selanjutnya, pada Persamaan (4.3.45) kalikan dari kiri dengan vektor v dan kalikan dari kanan dengan vektor v^T sehingga didapatkan:

$$v \left(\tilde{A}_{sr} \Sigma_1 \tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{12} \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T \right)^T = v \Sigma_1 v^T \quad (4.3.51)$$

Dengan melakukan operasi matriks pada Persamaan (4.3.51) maka diperoleh:

$$v \tilde{A}_{sr} \Sigma_1 \tilde{A}_{sr}^T v^T + v \tilde{A}_{12} \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T v^T + v \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T v^T = v \Sigma_1 v^T \quad (4.3.52)$$

Kemudian pada Persamaan (4.3.52), kumpulkan semua unsur yang memuat Σ_1 pada ruas kiri dan semua unsur yang tidak memuat Σ_1 ditempatkan pada ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$v \Sigma_1 v^T - v \tilde{A}_{sr} \Sigma_1 \tilde{A}_{sr}^T v^T = v \tilde{A}_{12} \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T v^T + v \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T v^T \quad (4.3.53)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.49) dan (4.3.50) ke dalam Persamaan (4.3.53), sehingga diperoleh:

$$v \Sigma_1 v^T - v \lambda \Sigma_1 \lambda^T v^T = v \tilde{A}_{12} \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T v^T + v \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T v^T \quad (4.3.54)$$

Nilai λ merupakan konstanta, maka Persamaan (4.3.54) dapat ditulis menjadi:

$$(1 - |\lambda|^2) v \Sigma_1 v^T = v \tilde{A}_{12} \Sigma_2 \tilde{A}_{12}^T v^T + v \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T v^T \geq 0 \quad (4.3.55)$$

Persamaan (4.3.55) hanya akan dipenuhi jika:

$$1 - |\lambda|^2 \geq 0$$

atau

$$|\lambda| \geq 1$$

Selanjutnya, jika diambil $|\lambda| = 1$, maka dari Persamaan (4.3.55) didapatkan:

$$v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T v^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T v^T = 0 \quad (4.3.56)$$

Persamaan (4.3.56) hanya akan dipenuhi jika:

$$v\tilde{A}_{12} = 0 \quad (4.3.57)$$

$$v\tilde{B}_{sr} = 0 \quad (4.3.58)$$

Kemudian akan dipilih vektor $(v \ 0)$ sebagai vektor eigen kiri dari \tilde{A}_s , maka dapat dirumuskan:

$$(v \ 0) \tilde{A}_s = (v \ 0) \lambda \quad (4.3.59)$$

Jika diambil \tilde{A}_s sesuai dengan Persamaan (4.3.34), maka Persamaan (4.3.59) menghasilkan:

$$(v \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = (v \ 0) \lambda$$

$$(v\tilde{A}_{sr} \ v^T\tilde{A}_{12}) = (v \ 0) \lambda \quad (4.3.60)$$

Selanjuta pada Persamaan (4.3.57) disubsitusikan ke dalam Persamaan (4.3.60), sehingga diperoleh:

$$(v\tilde{A}_{sr} \ 0) = (v \ 0) \quad (4.3.61)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.61) maka jelas terlihat bahwa jika diambil $|\lambda| = 1$ maka $(v \ 0)$ merupakan vektor eigen kiri dari matriks \tilde{A}_s . Selanjutnya jika vektor $(v \ 0)$ dikalikan dengan matriks \tilde{B}_s , maka akan didapatkan:

$$(v \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = v\tilde{B}_{sr} \quad (4.3.62)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.58) ke dalam Persamaan (4.3.59) maka didapatkan:

$$\begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.63)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.63) dapat dilihat bahwa dengan mengambil $|\lambda| = 1$ maka vektor $(v \ 0)$ merupakan kernel dari \tilde{B}_s . Sehingga berdasarkan Persamaan (4.3.61) dan (4.3.63), terlihat bahwa dengan mengambil $|\lambda| = 1$ maka vektor $(v \ 0)$ adalah merupakan vektor eigen kiri dari \tilde{A}_s dan sebagai kernel kiri dari \tilde{B}_s . Menurut **Teorema 2.2.1**, hal ini kontradiksi dan haruslah $|\lambda| < 1$, yang berarti bahwa haruslah nilai eigen dari \tilde{A}_{sr} kurang dari 1. Sehingga terbukti bahwa sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian Sistem Tereduksi

Keterkendalian sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditunjukkan melalui gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Dimana akan ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Persamaan Lyapunov untuk gramian keterkendalian dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.3.32) dan (4.3.34) ke dalam Persamaan (4.3.16), sehingga diperoleh persamaan yang sesuai dengan Persamaan $(x), (y)$ dan (z) . Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil didefinisikan sebagai mode cepat, sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat. Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol. Sebagaimana yang telah diketahui bahwa Σ_2 bersesuaian dengan mode cepat (nilai singular

Hankel kecil), maka dapat diasumsikan:

$$\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T \approx 0 \quad (4.3.64)$$

Substitusi Persamaan (4.3.64) ke dalam Persamaan (4.3.45), sehingga akan didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.65)$$

Persamaan (4.3.65) merupakan persamaan Lyapunov untuk Σ_1 . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.65). Misalkan diambil Σ_3 yang juga merupakan solusi dari Persamaan (4.3.65), maka akan berlaku:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_3 = 0 \quad (4.3.66)$$

Dari Persamaan (4.3.65) dan (4.3.66) diperoleh:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = \tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_3$$

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T - \tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T = \Sigma_1 - \Sigma_3$$

menghasilkan,

$$\tilde{A}_{sr}(\Sigma_1 - \Sigma_3)\tilde{A}_{sr}^T = \Sigma_1 - \Sigma_3 \quad (4.3.67)$$

Selanjutnya, misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kiri yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$v\tilde{A}_{sr} = v\lambda \quad (4.3.68)$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.3.69)$$

Kemudian pada Persamaan (4.3.67) akan dikalikan dari kiri dengan v dan akan dikalikan dari kanan dengan v^T , sehingga diperoleh:

$$v \tilde{A}_{sr} (\Sigma_1 - \Sigma_3) \tilde{A}_{sr}^T v^T = v (\Sigma_1 - \Sigma_3) v^T \quad (4.3.70)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.68) dan (4.3.69) ke dalam Persamaan (4.3.70), sehingga diperoleh:

$$v \lambda (\Sigma_1 - \Sigma_3) \lambda^T v^T = v (\Sigma_1 - \Sigma_3) v^T \quad (4.3.71)$$

Nilai λ adalah konstanta, sehingga Persamaan (4.3.71) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$(|\lambda|^2 - 1) v (\Sigma_1 - \Sigma_3) v^T = 0 \quad (4.3.72)$$

Persamaan (4.3.72) hanya akan dipenuhi jika $\Sigma_1 - \Sigma_3 = 0$ atau $\Sigma_1 = \Sigma_3$, maka terbukti bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.65).

Dari uraian diatas, telah ditunjukkan bahwa Σ_1 definit positif dan merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov $\tilde{A}_{sr} \Sigma_1 \tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr} \tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = 0$. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ_1 merupakan gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$.

Keteramatan Sistem Tereduksi

Keteramatan sistem tereduksi dapat ditunjukkan melalui gramian keteramatan dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Dimana akan ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keteramatan dari sistem tereduksi tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Persamaan Lyapunov untuk keteramatan dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan

Persamaan (4.3.32) dan (4.3.34) ke dalam Persamaan (4.3.17), yaitu:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.73)$$

Ukuran matriks-matriks pada Persamaan (4.3.73) sudah bersesuaian, sehingga operasi matriks pada Persamaan (4.3.73) dapat menghasilkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.74)$$

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{22} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_2 = 0 \quad (4.3.75)$$

$$\tilde{A}_{12}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{22}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_{sr} = 0 \quad (4.3.76)$$

$$\tilde{A}_{12}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{22}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{22} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 - \Sigma_2 = 0 \quad (4.3.77)$$

dari Persamaan (4.3.74) didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} = \Sigma_1 \quad (4.3.78)$$

karena $\tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21}$ dapat dianggap sama dengan nol, maka Persamaan (4.3.78) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.79)$$

Persamaan (4.3.74) merupakan persamaan Lyapunov untuk gramian keteramatan. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.79). Misalkan diambil Σ_4 yang juga merupakan solusi dari Persamaan (4.3.79), maka akan berlaku:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_4 = 0 \quad (4.3.80)$$

dari Persamaan (4.3.79) dan (4.3.80) didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = \tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_4$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} - \tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} = \Sigma_1 - \Sigma_4 \quad (4.3.81)$$

Persamaan (4.3.81) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\tilde{A}_{sr}^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) - \tilde{A}_{sr} = \Sigma_1 - \Sigma_4 \quad (4.3.82)$$

Selanjutnya, misalkan akan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kanan yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$\tilde{A}_{sr} v = \lambda v \quad (4.3.83)$$

atau

$$v^T \tilde{A}_{sr}^T = v^T \lambda^T \quad (4.3.84)$$

Selanjutnya kalikan dari kiri Persamaan (4.3.82) dengan v^T dan kalikan dari kanan dengan v sehingga diperoleh:

$$v^T \tilde{A}_{sr}^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) \tilde{A}_{sr} v = v^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) v \quad (4.3.85)$$

substitusi Persamaan (4.3.83) dan (4.3.84) ke dalam Persamaan (4.87), sehingga menghasilkan:

$$v^T \lambda^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) \lambda v = v^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) v \quad (4.3.86)$$

Nilai λ adalah konstanta, sehingga Persamaan (4.3.86) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$(|\lambda|^2 - 1) v^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) v = 0 \quad (4.3.87)$$

Persamaan (4.3.87) hanya akan dipenuhi jika $\Sigma_1 - \Sigma_4 = 0$ atau $\Sigma_1 = \Sigma_4$. Jadi terbukti bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov yang dinyatakan pada Persamaan

(4.3.79).

Berdasarkan pembahasan di atas, telah ditunjukkan bahwa Σ_1 definit positif dan merupakan solusi tunggal dari Persamaan $\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0$, maka menurut **Teorema 2.2.4**, dapat disimpulkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keteramatan dari sistem tereduksi $\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$.

4.4 Simulasi

Sistem Awal (Simulasi 1)

Pada simulasi ini, akan diambil sistem awal (A, B, C, D) yang merupakan sistem linier waktu diskrit sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} -1.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & -0.5 & -1 & 0.2 & -1 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & -1 & 0.2 & 0 & -1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & -1 & -0.2 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.5 & 0.2 & -0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0.6 & 0.9 & -0.2 \\ 0.6 & 0.5 & -0.8 & -0.2 & 1.3 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.7 & -0.8 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ -0.6 & 0.2 & 0 & 1.4 & 0.2 & -0.6 & -0.2 & 0.8 & 0.2 & 1.1 & -0.2 & 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0 & -0.2 & -0.2 & -1.2 & 0.2 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.7 & 1.3 & 0.8 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & -0.5 \\ 1 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0 & 1 & -0.2 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 & 1.1 & 0 & 0.5 & -0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 & -0.6 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.6 & 0.5 & 0.2 & 1.3 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1.1 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & -0.5 & 0.6 & -1.1 & 0.8 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 & -1.5 & -1.3 & 0.2 & -1 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & -1 & 0.2 & 0 & -1.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1.5 & -0.2 & -0.2 & 0 & -1.2 & 0.5 & 1.1 & -0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0 & -0.6 & 0.2 & -0.2 & -0.5 & 0.6 & 0.9 & -0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.7 & -0.2 & 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0.7 & -0.8 & 0 & 0.5 & -1.1 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ -0.6 & 0.2 & 0 & 1.2 & 0.2 & -0.6 & -0.2 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.5 & 0.7 & -1.2 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & -0.2 & -0.2 & -1.2 & 0.5 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0.7 & 0 & 0.8 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & -0.5 \\ -1 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -1.2 & 0 & 1 & -0.2 & 0.6 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 & -0.2 & 0 & 0.5 & -0.6 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ -0.7 & 0 & -0.2 & -0 & 0.2 & 0 & -0.6 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.6 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & -0.5 & 0.6 & -0.2 & 0.8 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.5 & -1.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & -0.2 & 0.5 & 1.2 \\ 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 & -0.6 & 0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & -0.6 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & -0.5 & 0.6 & -0.2 & 0.8 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 1.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 & -0.5 & -1 & 0.2 & -1 & 0.5 & 0.2 & -0.5 & 0.2 & -1 & 0.2 & 0 & -1.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 1.5 & -0.2 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0.5 & 1.1 & -0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & -0.5 & 0.6 & 0.9 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0.2 \ 2 \ 0 \ 0.2 \ 2 \ \dots \ 0.2 \ 2 \ 0 \ 0.2 \ 2)$$

$$D = (-2)$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \lambda_i $
1	2.6659
2	2.0448
3	2.0448
4	1.8964
5	1.8964
6	1.8249
7	1.8249
8	1.4294
9	1.4294
10	1.1271
11	1.1271
12	1.1499
13	1.1499
14	0.9758
15	0.9168
16	0.9168
17	0.5719
18	0.5719
19	0.1501
20	0.1501

Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 20. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2**

sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 20. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Berdasarkan **Teorema 2.2.4**, kita akan mendapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M , jika sistem yang diberikan adalah stabil (dalam hal ini stabil asimtotik), terkendali, dan teramati. Sehingga apabila diberikan suatu sistem awal yang tidak stabil, terkendali, dan teramati, maka berdasarkan Definisi 2.2.4, kita tidak bisa mendapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M yang mana berfungsi untuk membentuk sistem setimbang. Sistem setimbang adalah salah satu tahapan dari sistem awal sebelum dapat direduksi menggunakan metode SPA.

Oleh karena itu, perlu adanya dekomposisi sistem tak stabil (pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tak stabil).

Dekomposisi Sistem Tak Stabil

Pada dekomposisi sistem tak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran B.

Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tak stabil sebagai berikut:

Sub Sistem Stabil

$$A_s = \begin{pmatrix} -0.0863 & -0.3738 & 0.3516 & -0.5274 & 0.0536 & -0.2766 & 0.4463 \\ 0.1178 & 0.2494 & 0.0237 & -0.3644 & -0.2137 & 0.1027 & -0.0921 \\ 0 & 0 & -0.7817 & 0.7690 & 0.4598 & 0.4790 & -0.7595 \\ 0 & 0 & -0.3147 & -0.1088 & 0.2200 & -0.3040 & -0.0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2369 & -1.0088 & 0.5211 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7250 & 0.4601 & -0.6482 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9757 \end{pmatrix}$$

$$B_s = \begin{pmatrix} -4.6884 \\ -2.6844 \\ 1.7678 \\ -0.8247 \\ 1.6785 \\ -6.9683 \\ -0.1890 \end{pmatrix}$$

$$C_s = \begin{pmatrix} -1.7119 & 2.0575 & -0.2877 & 1.1647 & 0.3399 & 0.2551 & -1.8820 \end{pmatrix}$$

$$D_s = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestailan, keterkendalian dan Keteramatan.

Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.2 sebagai berikut.

Tabel 4.2: Nilai Eigen dari Sub Sistem Stabil

i	$ \lambda_i $
1	0.9757
2	0.9168
3	0.9168
4	0.5719
5	0.5719
6	0.1501
7	0.1501

Berdasarkan Tabel 4.2, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s seluruhnya bernilai kurang dari 1, berdasarkan **Teorema 2.2.1** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah terkendali.

Keteramatan sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah teramati.

Sub Sistem Tak Stabil

Pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang tertulis pada Lampiran C, dapat dilakukan analisis kestabilan,

keterkendalian dan Keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3: Nilai Eigen dari Sub Sistem Tak Stabil

i	$ \lambda_i $
1	2.6659
2	2.0448
3	2.0448
4	1.8964
5	1.8964
6	1.8249
7	1.8249
8	1.4294
9	1.4294
10	1.1498
11	1.1498
12	1.1270
13	1.1270

Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u seluruhnya bernilai lebih dari 1, berdasarkan **Teorema 2.2.1** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 13. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 13. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah teramati.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari subsistem stabil digunakan software MATLAB R2010a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} 0.3572 & -0.8721 & -0.0546 & 0.0728 & -0.0058 & -0.0323 & 0.0021 \\ 0.8721 & 0.3933 & -0.1364 & 0.2106 & 0.0002 & -0.0044 & -0.0005 \\ -0.0546 & 0.1364 & -0.7042 & -0.4861 & -0.0241 & -0.1232 & 0.0092 \\ -0.0728 & 0.2106 & 0.4861 & 0.2004 & -0.0414 & -0.2137 & 0.0156 \\ -0.0058 & -0.0002 & -0.0241 & 0.0414 & -0.9870 & 0.1156 & 0.0066 \\ 0.0323 & -0.0044 & 0.1232 & -0.2137 & -0.1156 & -0.2964 & -0.2087 \\ 0.0021 & 0.0005 & 0.0092 & -0.0156 & 0.0066 & 0.2087 & 0.0305 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s = \begin{pmatrix} 2.1933 \\ -0.0241 \\ 1.7572 \\ 2.7765 \\ -0.0023 \\ -0.0800 \\ 0.0085 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} 2.1933 & 0.0241 & 1.7572 & -2.7765 & -0.0023 & 0.0800 & 0.0085 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 30.0630 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28.0162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.3802 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.8336 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6715 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9338 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0453 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 30.0630 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28.0162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.3802 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.8336 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6715 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9338 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0453 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.4 berikut.

Tabel 4.4: Nilai Singular Hankel

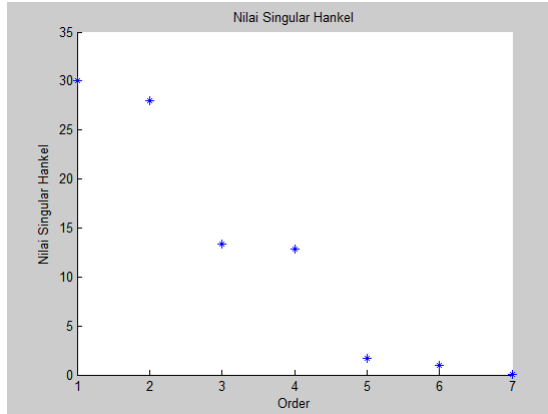
i	$ \sigma_i $
1	30.0630
2	28.0162
3	13.3802
4	12.8336
5	1.6715
6	0.9338
7	0.0453

Berdasarkan Tabel 4.4, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.1 berikut.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.5 berikut.



Gambar 4.1: Nilai Singular Hankel

Tabel 4.5: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

i	$ \lambda_i $
1	0.9757
2	0.9168
3	0.9168
4	0.5719
5	0.5719
6	0.1501
7	0.1501

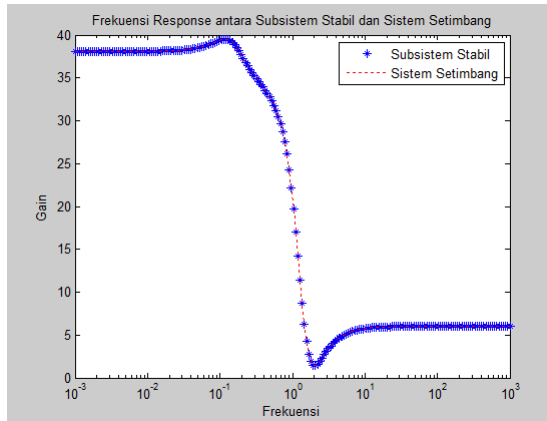
Berdasarkan Tabel 4.5, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a,

dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah teramati.

Dapat ditunjukkan frekuensi respon antara subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.2 sebagai berikut.



Gambar 4.2: Frekuensi Respon antara Subsisitem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Berdasarkan pada Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan

sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum direduksi sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dengan menggunakan metode SPA, maka akan di cek kembali syarat dimana kita bisa mereduksi sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sesuai dengan **Teorema 2.2.6**. Didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja kita dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.6 berikut.

Tabel 4.6: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Simulasi 1

Orde Reduksi	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2\sigma_{r+1}$	Keterangan
1	53.3732	113.7610	Memenuhi
2	26.4664	57.7285	Memenuhi
3	26.4639	30.9681	Memenuhi
4	1.7919	5.3010	Memenuhi
5	1.7769	1.9581	Memenuhi
6	0.0906	0.0906	Memenuhi

Berdasarkan Tabel 4.6 dapat disimpulkan bahwa kita dapat mereduksi sistem dengan SPA $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5, dan 6. Hasil dari syarat orde berapa saja kita dapat mereduksi dengan BT seperti Tabel 4.7 berikut:

Tabel 4.7: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Simulasi 1

Orde Reduksi	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2\sigma_{r+1}$	Keterangan
1	4.3382	4.3382	Memenuhi
2	0.4281	0.4281	Memenuhi
3	0.0563	0.0563	Memenuhi
4	0.0050	0.0051	Memenuhi
5	0.0006	0.0006	Memenuhi
6	0.000017	0.000017	Memenuhi

Berdasarkan Tabel 4.7 dapat disimpulkan bahwa kita dapat mereduksi sistem dengan BT $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5, dan 6.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas simulasi dengan orde 2,4,5, dan 6 sebagai berikut.

Reduksi SPA Orde 2

Dengan order 2, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.4513 & -0.8553 \\ 0.8459 & 0.3489 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.6276 \\ 2.5102 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.8596 & 2.4399 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -12.1462 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 2

i	$ \lambda_i $
1	0.9386
2	0.9386

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 2. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 2. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 15 seperti yang tertulis pada Lampiran D. Akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.9 berikut.

Tabel 4.9: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 15

i	$ \lambda_i $
1	0.9386
2	0.9386
3	2.6659
4	1.8249
5	1.8249
6	1.4294
7	1.4294
8	2.0448
9	2.0448
10	1.8865
11	1.8865
12	1.1271
13	1.1271
14	1.1499
15	1.1499

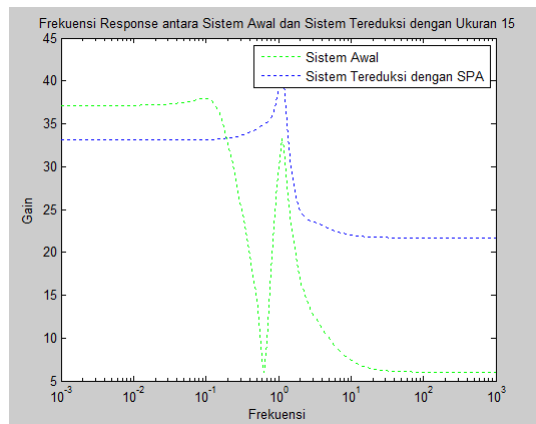
Berdasarkan Tabel 4.9, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 15. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a,

dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 15. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.3 berikut.

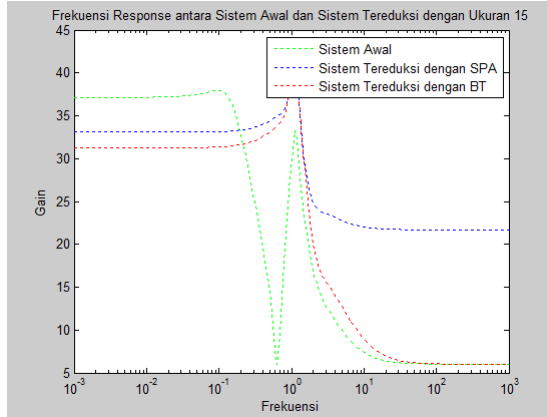


Gambar 4.3: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.3, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan

SPA, dan sistem tereduksi total orde 15 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.4 berikut.



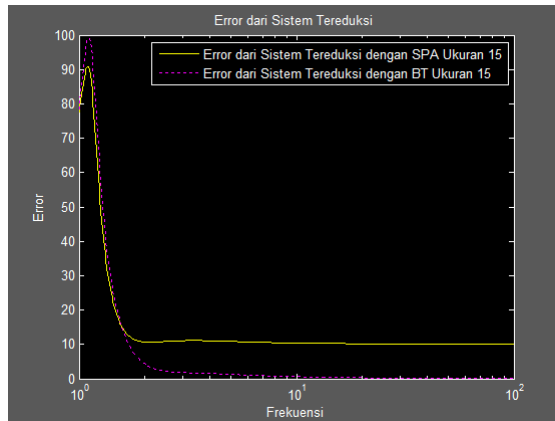
Gambar 4.4: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 15 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.4, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 15 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan BT ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) orde 15 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) sedangkan sistem tereduksi total orde 15 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda .

Error dari Sistem Tereduksi Orde 15

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.5: Error Sistem Tereduksi Orde 15

Berdasarkan Gambar 4.5, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 15 dapat disajikan pada Tabel 4.10 berikut.

Tabel 4.10: Error dari Sistem Tereduksi Orde 15

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	79.1821	80.7568
100	10.1486	0.0594

Dari Tabel 4.10, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih kecil dari error sistem tereduksi dengan BT. Sedangkan pada frekuensi

tinggi berlaku sebaliknya.

Reduksi SPA Orde 3

Dengan order 3, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.4309 & 0.7782 & -0.2700 \\ -0.8860 & 0.3103 & -0.1850 \\ 0.0545 & -0.3234 & -0.9406 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.5083 \\ -2.0136 \\ 0.6101 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.1069 & -2.5177 & 0.5897 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -12.1483 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.11 berikut.

Tabel 4.11: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 3

i	$ \lambda_i $
1	0.9386
2	0.9386
3	0.9997

Berdasarkan Tabel 4.11, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 3. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 3. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 16 seperti yang tertera pada Lampiran E. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.12 berikut.

Tabel 4.12: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 16

i	$ \lambda_i $
1	0.9386
2	0.9386
3	0.9997
4	2.6659
5	1.8249
6	1.8249
7	1.4294
8	1.4294
9	2.0448
10	2.0448
11	1.8865
12	1.8865
13	1.1271
14	1.1271
15	1.1499
16	1.1499

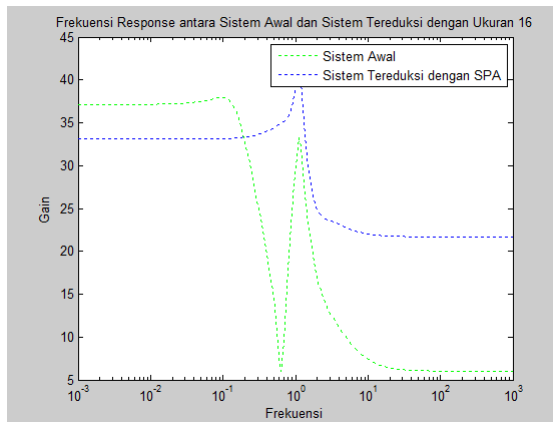
Berdasarkan Tabel 4.12, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 16. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan

M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 16. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) SPA seperti pada Gambar 4.6 berikut.

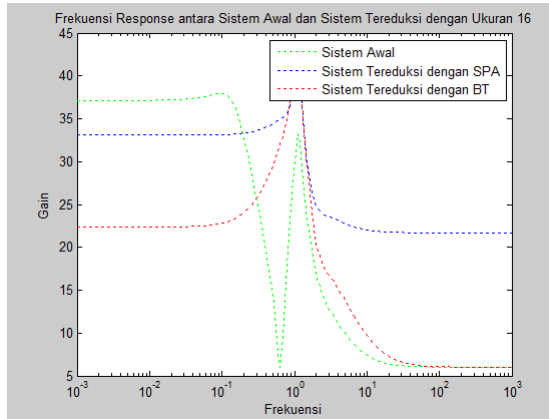


Gambar 4.6: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.6, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan

SPA, dan sistem tereduksi total orde 16 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.7 berikut.



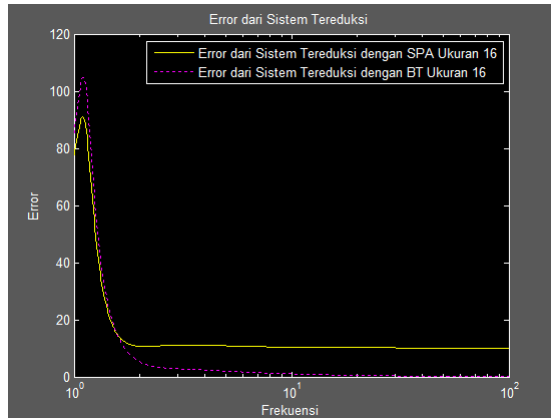
Gambar 4.7: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 16 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.7, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 16 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan BT ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) orde 16 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) sedangkan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda .

Error dari Sistem Tereduksi Orde 16

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.8 berikut.



Gambar 4.8: Error Sistem Tereduksi Orde 16

Berdasarkan Gambar 4.8, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 16 dapat disajikan pada Tabel 4.13 berikut.

Tabel 4.13: Error dari Sistem Tereduksi Orde 16

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	79.1806	87.7397
100	10.1508	0.1055

Dari Tabel 4.13, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih kecil dari error sistem tereduksi dengan BT. Sedangkan pada frekuensi

tinggi berlaku sebaliknya.

Reduksi SPA Orde 4

Dengan order 4, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.3855 & 0.4986 & 0.3400 & 0.0568 \\ -0.2897 & 0.3914 & -0.8489 & -0.1427 \\ 0.1680 & 0.7305 & 0.2709 & 0.0346 \\ -0.8580 & -0.2078 & 0.2026 & -0.0091 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} 2.0025 \\ -0.0408 \\ -3.1876 \\ -1.2433 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.4591 & 0.0306 & -1.7173 & 3.5409 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.0049 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.14 berikut.

Tabel 4.14: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4

i	$ \lambda_i $
1	0.3423
2	0.0823
3	0.9130
4	0.9130

Berdasarkan Tabel 4.14, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 17 seperti yang tertera pada Lampiran F. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.15 berikut.

Tabel 4.15: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 17

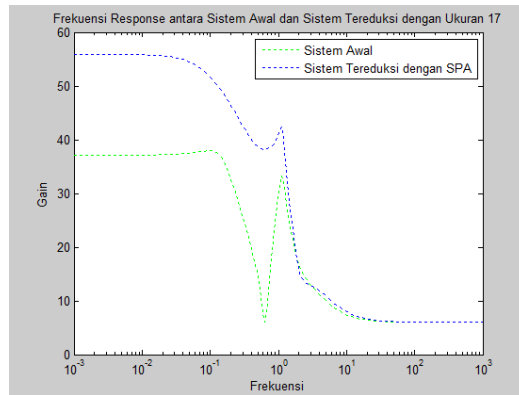
i	$ \lambda_i $
1	0.3423
2	0.0823
3	0.9130
4	0.9130
5	2.6659
6	1.8249
7	1.8249
8	1.4294
9	1.4294
10	2.0448
11	2.0448
12	1.8865
13	1.8865
14	1.1271
15	1.1271
16	1.1499
17	1.1499

Berdasarkan Tabel 4.15, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 17. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat

ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 17. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat. Berikut grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 17 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti Gambar 4.9 berikut.

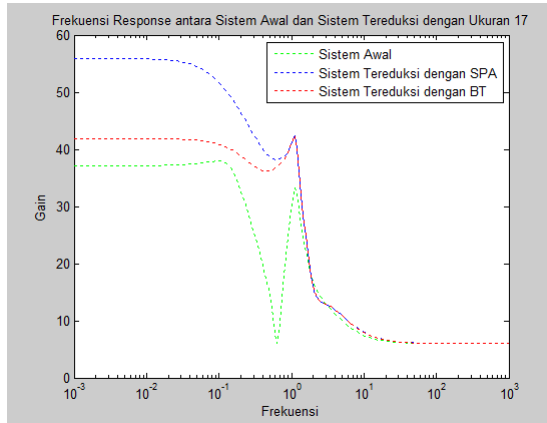


Gambar 4.9: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.9, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 17 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 17 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal

dengan sistem tereduksi total orde 17 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 17 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.10 berikut.



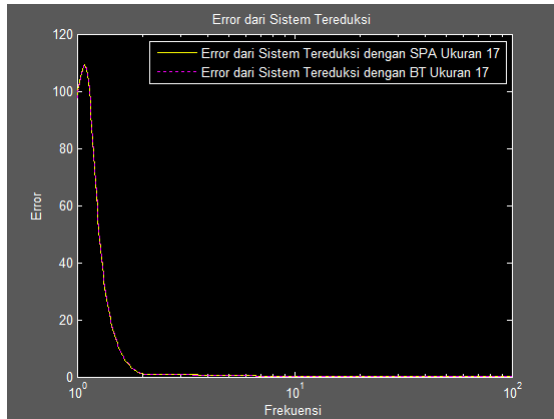
Gambar 4.10: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 17 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.10, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 17 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 17 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) orde 17 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D).

Error dari Sistem Tereduksi Orde 17

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.11 berikut.



Gambar 4.11: Error Sistem Tereduksi Orde 17

Berdasarkan Gambar 4.11, terlihat bahwa error dari sistem tereduksi orde 17 disajikan pada Tabel 4.16 berikut.

Tabel 4.16: Error dari Sistem Tereduksi Orde 17

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	100.1093	99.4963
100	0.0068	0.0018

Dari Tabel 4.16, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih lebih besar dari error sistem tereduksi dengan BT. Begitupula

pada frekuensi tinggi berlaku sama.

Reduksi SPA Orde 5

Dengan order 5, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.9737 & 0.1417 & -0.0773 & 0.1027 & -0.0932 \\ 0.1133 & 0.3328 & 0.2076 & 0.8667 & 0.0650 \\ -0.0048 & 0.0069 & -0.4592 & -0.1184 & -0.0374 \\ -0.0637 & -0.8885 & -0.1005 & 0.3939 & -0.1404 \\ -0.1320 & -0.1797 & 0.8536 & -0.2180 & -0.0230 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.0904 \\ -1.9866 \\ -3.2011 \\ -0.0218 \\ -1.2307 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.6005 & -1.6973 & -0.3284 & 0.0186 & 3.5147 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.0049 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.17 berikut.

Tabel 4.17: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5

i	$ \lambda_i $
1	0.9978
2	0.9129
3	0.9129
4	0.0841
5	0.3396

Berdasarkan Tabel 4.17, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1,

maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 18 seperti yang tertulis pada Lampiran G.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.18 berikut.

Tabel 4.18: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 18

i	$ \lambda_i $
1	0.9978
2	0.9129
3	0.9129
4	0.0841
5	0.3396
6	2.6659
7	1.8249
8	1.8249
9	1.4294
10	1.4294
11	2.0448
12	2.0448
13	1.8865
14	1.8865
15	1.1271
16	1.1271
17	1.1499
18	1.1499

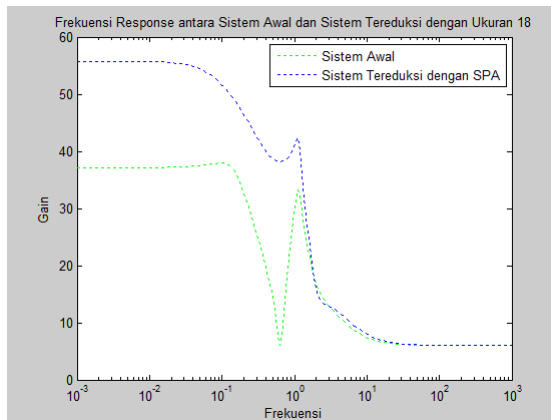
Berdasarkan Tabel 4.18, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 18. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r)

adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 18. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 18 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.12 berikut.

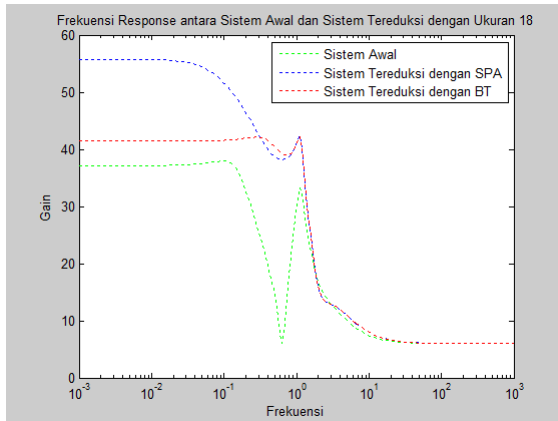


Gambar 4.12: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.12, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 18 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 18

(A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 18 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 18 $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.13 berikut.



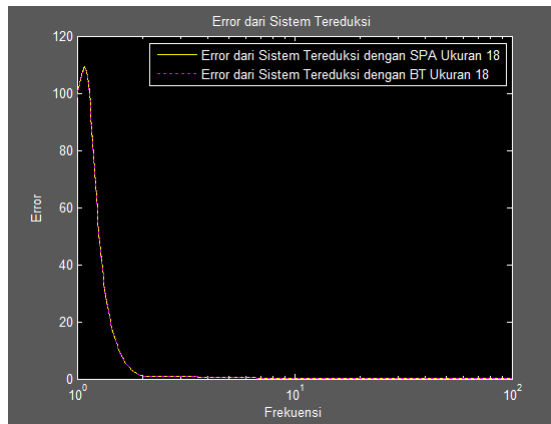
Gambar 4.13: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 18 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.13, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 18 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 18 $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ orde 18 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) .

Error dari Sistem Tereduksi Orde 18

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.14 berikut.



Gambar 4.14: Error Sistem Tereduksi Orde 18

Berdasarkan Gambar 4.14, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 18 dapat disajikan pada Tabel 4.19 berikut.

Tabel 4.19: Error dari Sistem Tereduksi Orde 18

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	100.1139	100.0799
100	0.0068	0.0020

Dari Tabel 4.19, dapat dilihat bahwa error sistem

tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih lebih besar dari error sistem tereduksi dengan BT. Begitupula pada frekuensi tinggi berlaku sama.

Reduksi SPA Orde 6

Dengan order 6, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.7443 & -0.0215 & -0.2135 & 0.1276 & 0.1672 & -0.3473 \\ 0.2446 & 0.2352 & 0.0746 & 0.0511 & -0.4881 & -0.2681 \\ -0.2220 & 0.2555 & 0.1955 & -0.8191 & -0.0771 & -0.3128 \\ -0.1093 & -0.0615 & 0.7947 & 0.3572 & -0.1660 & -0.3083 \\ -0.0474 & 0.3806 & -0.2785 & 0.0665 & -0.6348 & 0.1144 \\ -0.0801 & -0.1077 & -0.3991 & 0.2750 & -0.1872 & -0.4905 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.4870 \\ -2.5809 \\ 0.4064 \\ 2.1933 \\ 1.9136 \\ 0.2834 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.4012 & 2.9287 & 0.2628 & 2.1933 & 1.2862 & 0.5861 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.9999 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat disajikan pada Tabel 4.20 berikut.

Tabel 4.20: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6

i	$ \lambda_i $
1	0.9166
2	0.9166
3	0.9729
4	0.1307
5	0.5739
6	0.5739

Berdasarkan Tabel 4.20, terlihat bahwa nilai absolut dari nilai eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 19 seperti yang tertulis pada Lampiran H. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_r seperti yang disajikan pada Tabel 4.21 berikut.

Tabel 4.21: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 19

i	$ \lambda_i $
1	0.9166
2	0.9166
3	0.9729
4	0.1307
5	0.5739
6	0.5739
7	2.6659
8	1.8249
9	1.8249
10	1.4294
11	1.4294
12	2.0448
13	2.0448
14	1.8865
15	1.8865
16	1.1271
17	1.1271
18	1.1499
19	1.1499

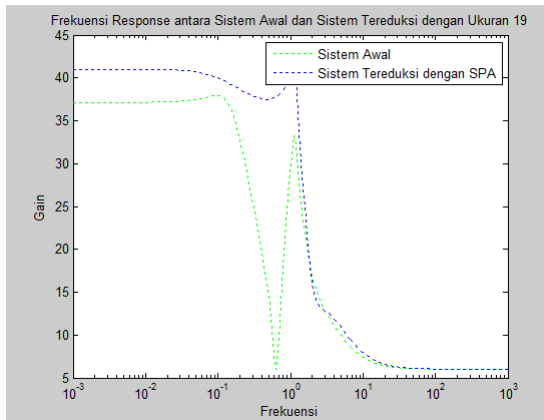
Berdasarkan Tabel 4.21, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 13, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 19. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r)

adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 19. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 19 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.15 berikut.

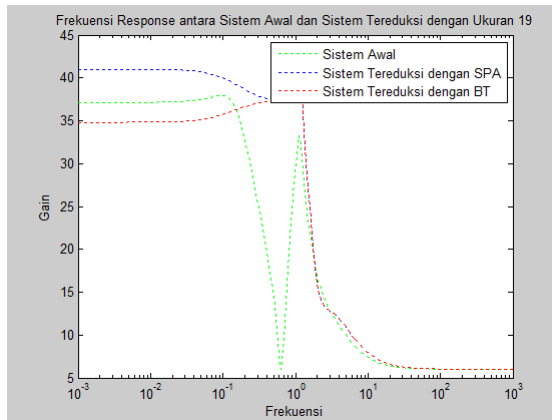


Gambar 4.15: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.15, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 19 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 19

(A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 19 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 19 $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.16 berikut.



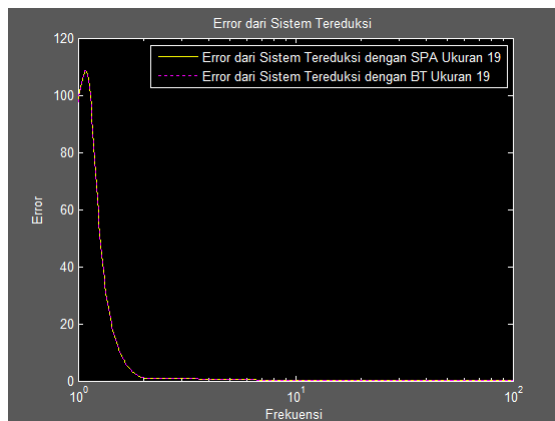
Gambar 4.16: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 19 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.16, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 19 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 19 $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ orde 19 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) .

Error dari Sistem Tereduksi Orde 19

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.17 berikut.



Gambar 4.17: Error Sistem Tereduksi Orde 19

Berdasarkan Gambar 4.17, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 19 dapat disajikan pada Tabel 4.22 berikut.

Tabel 4.22: Error dari Sistem Tereduksi Orde 19

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	99.5096	99.4318
100	0.0018	0.0018

Dari Tabel 4.22, dapat dilihat bahwa error sistem

tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih lebih besar dari error sistem tereduksi dengan BT. Begitupula pada frekuensi tinggi error sistem tereduksi dengan SPA sama dengan error sistem tereduksi dengan BT.

Sistem Awal (Simulasi 2)

Pada simulasi ini, akan diambil sistem awal (A, B, C, D) yang merupakan sistem linier waktu diskrit sebagai berikut:

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem (A, B, C, D)

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$$

$$D = (-1)$$

yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.23 berikut.

Tabel 4.23: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \lambda_i $
1	2.2000
2	2.1000
3	1.5000
4	1.3000
5	0.8000
6	0.7000
7	0.5000
8	0.1000
9	0.1000
10	0.3000
11	0.4000
12	1.2000
13	1.4000
14	1.7000
15	2.1000

Berdasarkan Tabel 4.23, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 15. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal

(A, B, C, D) adalah 15. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Berdasarkan **Teorema 2.2.4**, kita akan mendapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M , jika sistem yang diberikan adalah stabil (dalam hal ini stabil asimtotik), terkendali, dan teramati. Sehingga apabila diberikan suatu sistem awal yang tidak stabil, terkendali, dan teramati, maka berdasarkan Definisi 2.2.4, kita tidak bisa mendapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M yang mana berfungsi untuk membentuk sistem setimbang. Sistem setimbang adalah salah satu tahapan dari sistem awal sebelum dapat direduksi menggunakan metode SPA.

Oleh karena itu, perlu adanya dekomposisi sistem tak stabil (pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tak stabil).

Pada dekomposisi sistem tak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran I. Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran J. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tak stabil sebagai berikut:

Sub Sistem Stabil

$$A_s = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

$$B_s = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_s = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_s = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestailan, keterkendalian dan Keteramatan.

Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.24 sebagai berikut.

Tabel 4.24: Nilai Eigen dari Sub Sistem Stabil

i	$ \lambda_i $
1	0.8000
2	0.7000
3	0.5000
4	0.1000
5	0.1000
6	0.3000
7	0.4000

Berdasarkan Tabel 4.24, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s suluruhnya bernilai kurang

dari 1, berdasarkan **Teorema 2.2.1** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah terkendali.

Keteramatan sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_S) adalah teramati.

Sub Sistem Tak Stabil

$$A_u = \begin{pmatrix} 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_u = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) , dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan Keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.25 berikut.

Tabel 4.25: Nilai Eigen dari Sub Sistem Tak Stabil

i	$ \lambda_i $
1	2.2000
2	2.1000
3	1.5000
4	1.3000
5	1.2000
6	1.4000
7	1.7000
8	2.1000

Berdasarkan Tabel 4.25, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u seluruhnya bernilai lebih dari 1, berdasarkan **Teorema 2.2.1** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 8. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 8. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** subsistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah teramati.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari subsistem stabil digunakan software MATLAB R2010a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} -0.3776 & -0.4367 & 0.0353 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0001 & 0 \\ -0.4367 & -0.1513 & -0.2822 & 0.0346 & -0.0012 & -0.0005 & 0 \\ 0.0353 & -0.2822 & -0.2785 & -0.3416 & -0.0284 & -0.0012 & -0.0002 \\ 0.0001 & 0.0346 & -0.3416 & -0.2289 & 0.2601 & 0.0390 & 0.0015 \\ 0.0005 & -0.0012 & -0.0284 & 0.2601 & -0.3583 & 0.3320 & -0.0059 \\ 0.0001 & -0.0005 & -0.0012 & 0.0390 & 0.3320 & -0.0609 & -0.1715 \\ 0 & 0 & -0.0002 & 0.0015 & -0.0059 & -0.1715 & 0.1555 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s = \begin{pmatrix} -2.5823 \\ 0.5738 \\ 0.0502 \\ -0.0124 \\ -0.0003 \\ 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} -2.5823 & 0.5738 & 0.0502 & -0.0124 & -0.0003 & 0.0001 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 8.2124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1858 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0022 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 8.2124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1858 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0022 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

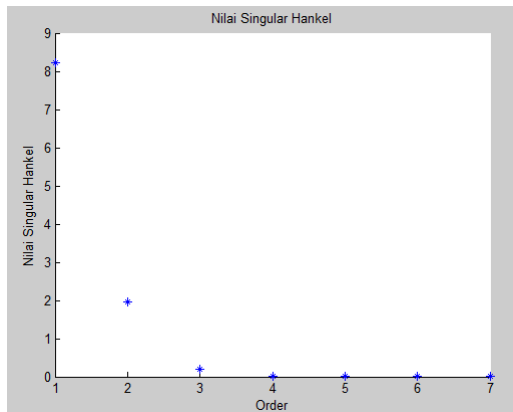
Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.26 berikut.

Tabel 4.26: Nilai Singular Hankel

i	$ \lambda_i $
1	8.2124
2	1.9551
3	0.1858
4	0.0257
5	0.0022
6	0.0003
7	0.0000

Berdasarkan Tabel 4.26, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.18 berikut.

**Gambar 4.18:** Nilai Singular Hankel

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat disajikan pada Tabel 4.27 berikut.

Tabel 4.27: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

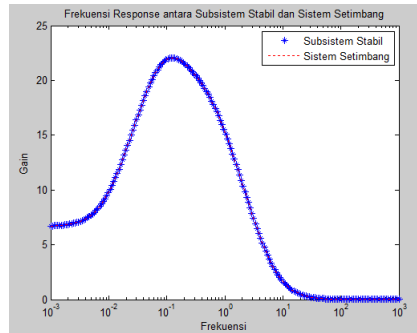
i	$ \lambda_i $
1	0.8000
2	0.7000
3	0.5000
4	0.1000
5	0.4000
6	0.3000
7	0.1000

Berdasarkan Tabel 4.27, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah teramati.

Frekuensi respon antara subsistem stabil dengan sistem setimbang yang disajikan pada Gambar 4.19 berikut.



Gambar 4.19: Frekuensi Respon antara Subsisitem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)

Berdasarkan pada Gambar 4.19 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara sub sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum direduksi sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dengan menggunakan metode SPA, berdasarkan **Teorema 2.2.6**. Didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja kita dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.28 berikut:

Tabel 4.28: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Simulasi 2

Orde Reduksi	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2\sigma_{r+1}$	Keterangan
1	64.9016	113.7610	Memenuhi
2	25.4894	57.7285	Memenuhi
3	27.0559	30.9681	Memenuhi
4	3.3207	5.3010	Memenuhi
5	1.7688	1.9581	Memenuhi
6	0.0905	0.0906	Memenuhi

Berdasarkan Tabel 4.28 dapat disimpulkan bahwa kita

dapat mereduksi sistem dengan SPA $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5, dan 6.

Sebelum direduksi sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dengan menggunakan metode SPA, maka akan di cek kembali syarat dimana kita bisa mereduksi sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sesuai dengan **Teorema 2.2.6**. Didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja kita dapat mereduksi dengan BT seperti Tabel 4.29 berikut:

Tabel 4.29: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Simulasi 2

Orde Reduksi	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2\sigma_{r+1}$	Keterangan
1	3.8424	4.3382	Memenuhi
2	0.4243	0.4281	Memenuhi
3	0.0561	0.0563	Memenuhi
4	0.0051	0.0051	Memenuhi
5	0.0006	0.0006	Memenuhi
6	0.000017	0.000017	Memenuhi

Berdasarkan Tabel 4.29 dapat disimpulkan bahwa kita dapat mereduksi sistem dengan BT $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5, dan 6.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas simulasi dengan orde 2,4,5, dan 6 sebagai berikut.

Reduksi SPA Orde 2

Dengan oreder 2, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.5691 & -0.3221 \\ -0.3222 & 0.1150 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} 2.3669 \\ -1.1712 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} 2.3669 & -1.1708 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.9974 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.30 berikut.

Tabel 4.30: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 2

i	$ \lambda_i $
1	0.6969
2	0.2429

Berdasarkan Tabel 4.30, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 2. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 2. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi

total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 10 seperti yang tertulis pada Lampiran K. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.31 berikut.

Tabel 4.31: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 10

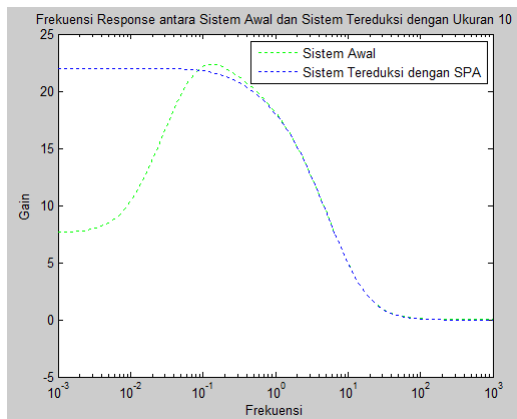
i	$ \lambda_i $
1	0.6969
2	0.2429
3	1.4000
4	2.2000
5	1.7000
6	1.3000
7	1.2000
8	2.1000
9	2.1000
10	1.5000

Berdasarkan Tabel 4.31, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramati.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 10 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.20 berikut.

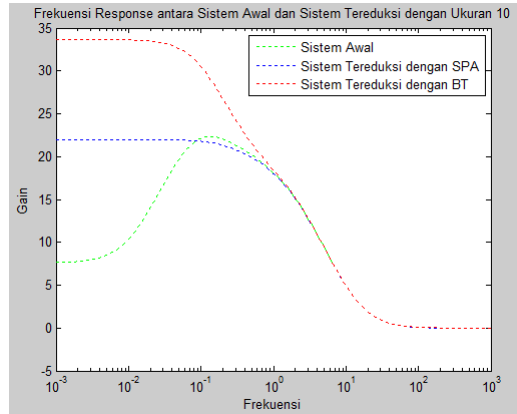


Gambar 4.20: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.20, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 10 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama pada saat frekuensi rendah.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal

dengan sistem tereduksi total orde 10 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 10 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.21 berikut. Pada Gambar 4.21, terlihat

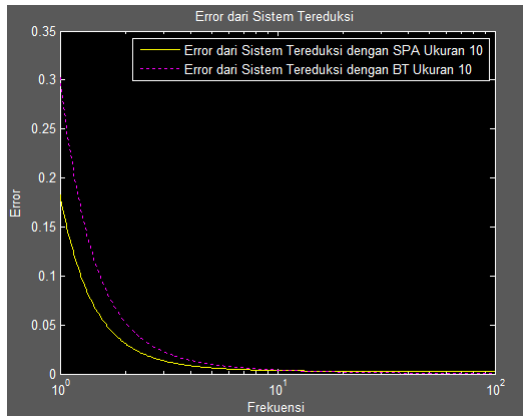


Gambar 4.21: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 10 dengan BT terhadap Output

bahwa sistem tereduksi total orde 10 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 10 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Error dari Sistem Tereduksi Orde 10

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.22 berikut.



Gambar 4.22: Error Sistem Tereduksi Orde 10

Berdasarkan Gambar 4.22, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 10 dapat disajikan pada Tabel 4.32 berikut.

Tabel 4.32: Error dari Sistem Tereduksi Orde 10

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	0.1783	0.2951
100	0.0026	3.712×10^{-4}

Dari Tabel 4.32, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih kecil dari error sistem tereduksi dengan BT. Sedangkan pada frekuensi tinggi berlaku sebaliknya.

Reduksi SPA Orde 3

Dengan order 3, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi

$(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.5715 & 0.3244 & 0.0724 \\ 0.3244 & 0.1030 & -0.2623 \\ 0.0724 & -0.2623 & -0.2336 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.3630 \\ -1.1762 \\ -0.1809 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.3630 & -1.1762 & -0.1809 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.9999 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.33 berikut.

Tabel 4.33: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 3

i	$ \lambda_i $
1	0.3221
2	0.7593
3	0.2649

Berdasarkan Tabel 4.33, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 3. Maka berdasarkan **Teorema**

2.2.2 sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 3. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 11 seperti yang tertera pada Lampiran L. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.34 berikut.

Tabel 4.34: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 11

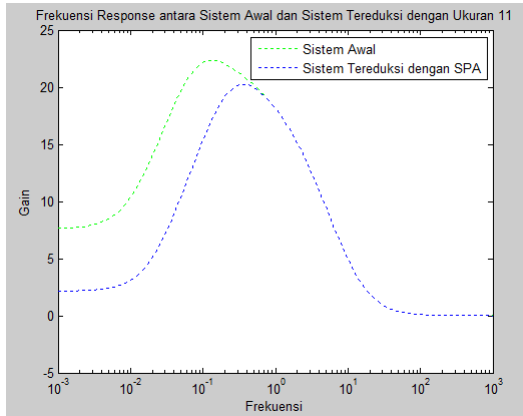
i	$ \lambda_i $
1	0.2627
2	0.7806
3	0.4579
4	1.4000
5	2.2000
6	1.7000
7	1.3000
8	1.2000
9	2.1000
10	2.1000
11	1.5000

Berdasarkan Tabel 4.34, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 11. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 11. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramati.

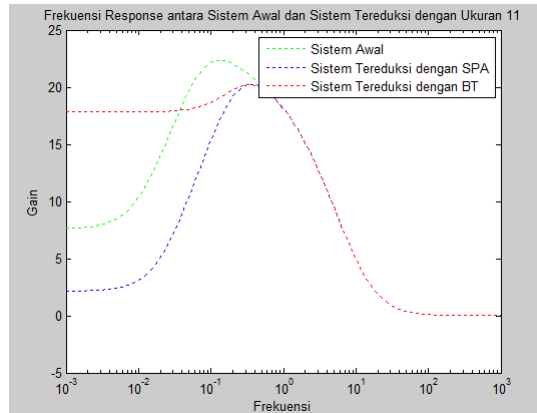
Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 11 (A_r, B_r, C_r, D_r) SPA seperti pada Gambar 4.23 berikut.



Gambar 4.23: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.23, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 11 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama pada saat frekuensi rendah.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 16 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 11 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.24 berikut.

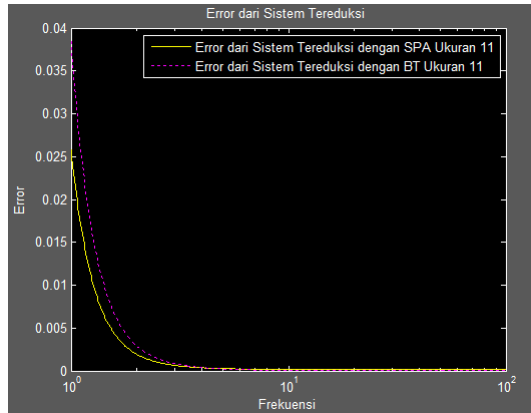


Gambar 4.24: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 11 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.24, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 11 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 11 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Error dari Sistem Tereduksi Orde 11

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.25 berikut.



Gambar 4.25: Error Sistem Tereduksi Orde 11

Berdasarkan Gambar 4.25, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 11 dapat disajikan pada Tabel 4.35 berikut.

Tabel 4.35: Error dari Sistem Tereduksi Orde 11

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.093	0.0249	0.0371
100	1.3370×10^{-4}	5.5185×10^{-7}

Dari Tabel 4.35, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih kecil dari error sistem tereduksi dengan BT. Sedangkan pada frekuensi tinggi berlaku sebaliknya.

Reduksi SPA Orde 4

Dengan oroder 4, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi

$(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.1233 & 0.2987 & -0.2317 & -0.0885 \\ 0.2987 & -0.5949 & 0.0786 & 0.0172 \\ -0.2317 & 0.0786 & -0.3867 & 0.3245 \\ -0.0889 & 0.0173 & 0.3262 & -0.1164 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.2642 \\ -2.3172 \\ -0.1784 \\ -0.0261 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.2642 & -2.3172 & -0.1784 & -0.0260 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.36 berikut.

Tabel 4.36: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4

i	$ \lambda_i $
1	0.3642
2	0.0024
3	0.7852
4	0.5561

Berdasarkan Tabel 4.36, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks

keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 12 seperti yang tertera pada Lampiran M.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.37 berikut.

Tabel 4.37: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 12

i	$ \lambda_i $
1	0.3395
2	0.0913
3	0.7928
4	0.6108
5	1.4000
6	2.2000
7	1.7000
8	1.3000
9	1.2000
10	2.1000
11	2.1000
12	1.5000

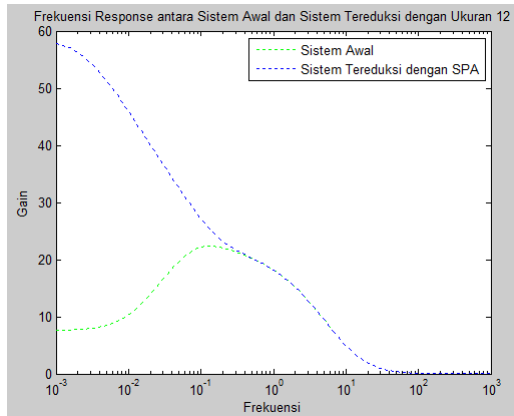
Berdasarkan Tabel 4.37, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 12. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 12. Maka

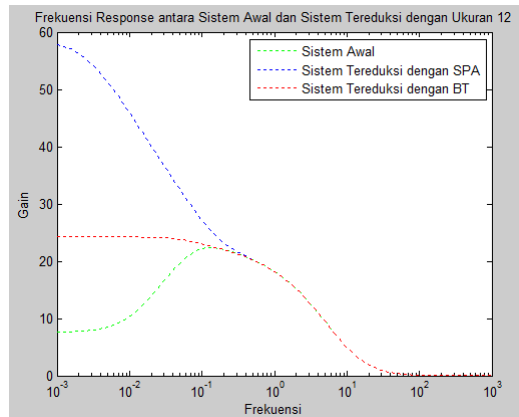
berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramati.

Berikut grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 12 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti Gambar 4.26 berikut.



Gambar 4.26: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.26, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 12 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah, sedangkan pada frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 12 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama. Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dan sistem tereduksi total orde 12 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 12 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), pada Gambar 4.27 berikut.



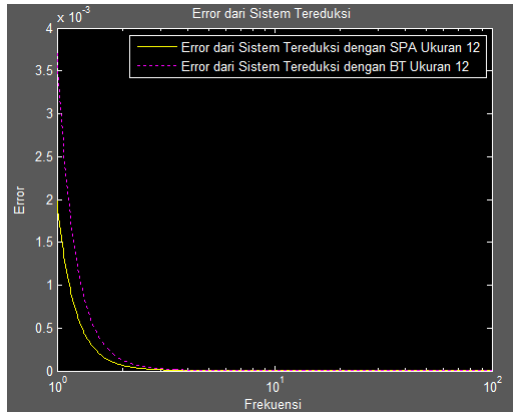
Gambar 4.27: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 12 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.27, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 12 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 12 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) orde 12 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D).

Error dari Sistem Tereduksi Orde 12

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.28 berikut.



Gambar 4.28: Error Sistem Tereduksi Orde 12

Berdasarkan Gambar 4.28, terlihat bahwa error dari sistem tereduksi orde 12 disajikan pada Tabel 4.38 berikut.

Tabel 4.38: Error dari Sistem Tereduksi Orde 12

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	0.0019	0.0035
100	7.6764×10^{-8}	8.2279×10^{-8}

Dari Tabel 4.38, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih kecil dari error sistem tereduksi dengan BT. Sedangkan pada frekuensi tinggi error sistem tereduksi dengan SPA dan error sistem tereduksi dengan BT hampir mendekati sama.

Reduksi SPA Orde 5

Dengan order 5, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.0198 & 0.0236 & -0.2711 & 0.0857 & 0.2307 \\ 0.0236 & -0.4114 & 0.4384 & -0.0874 & 0.0707 \\ -0.2711 & 0.4384 & -0.1512 & -0.0765 & -0.0139 \\ 0.0857 & -0.0874 & -0.0765 & -0.6022 & 0.1232 \\ 0.2308 & 0.0707 & -0.0139 & 0.1232 & -0.1002 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.0457 \\ -2.3091 \\ -0.5739 \\ 1.1562 \\ -0.0074 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.0457 & -2.3091 & -0.5739 & 1.1562 & -0.0074 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.39 berikut.

Tabel 4.39: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5

i	$ \lambda_i $
1	0.3763
2	0.0866
3	0.3153
4	0.7942
5	0.6383

Berdasarkan Tabel 4.39, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 13 seperti yang tertulis pada Lampiran N. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.40 berikut.

Tabel 4.40: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 13

i	$ \lambda_i $
1	0.3663
2	0.0329
3	0.4366
4	0.7985
5	0.6804
6	1.4000
7	2.2000
8	1.7000
9	1.3000
10	1.2000
11	2.1000
12	2.1000
13	1.5000

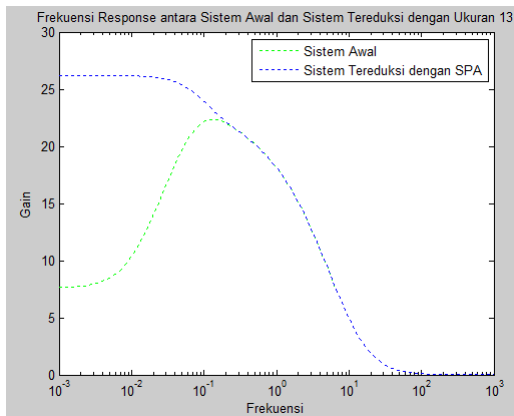
Berdasarkan Tabel 4.40, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 13. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan

M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 13. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramati.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 13 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.29 berikut.

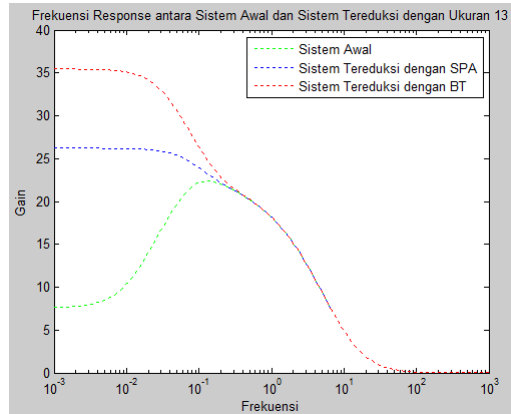


Gambar 4.29: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.29, terlihat bahwa sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 13 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 13 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 13 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan

SPA, dan sistem tereduksi total orde 13 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.30 berikut.



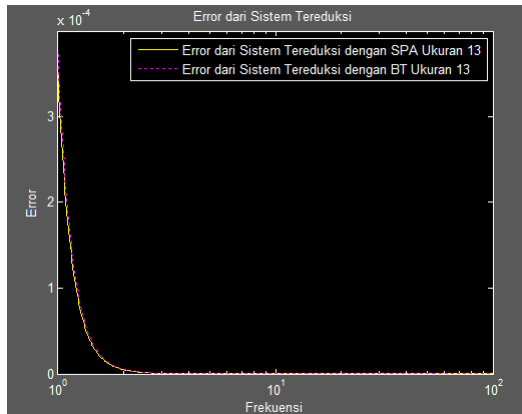
Gambar 4.30: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 13 dengan BT terhadap Output

Pada Gambar 4.30, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 13 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 13 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal (A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) orde 13 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D).

Error dari Sistem Tereduksi Orde 13

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.31 berikut.



Gambar 4.31: Error Sistem Tereduksi Orde 13

Berdasarkan Gambar 4.31, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 13 dapat disajikan pada Tabel 4.41 berikut.

Tabel 4.41: Error dari Sistem Tereduksi Orde 13

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	3.2722×10^{-4}	3.5117×10^{-4}
100	4.8305×10^{-4}	1.6645×10^{-9}

Dari Tabel 4.41, dapat dilihat bahwa error sistem

tereduksi dengan SPA pada frekuensi rendah lebih lebih besar dari error sistem tereduksi dengan BT. Begitupula pada frekuensi tinggi berlaku sama.

Reduksi SPA Orde 6

Dengan oreder 6, maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.5617 & 0.0358 & 0.0758 & -0.1226 & 0.1890 & -0.1514 \\ 0.0358 & -0.2766 & -0.1030 & 0.2779 & 0.0967 & -0.3585 \\ 0.0758 & -0.1030 & 0.1421 & 0.0317 & 0.0865 & 0.1178 \\ -0.1226 & 0.2779 & 0.0317 & -0.3167 & -0.0082 & -0.1812 \\ 0.1890 & 0.0967 & 0.0865 & -0.0082 & 0.0279 & -0.2636 \\ -0.1514 & -0.3585 & 0.1178 & -0.1812 & -0.2636 & -0.4355 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.3028 \\ -0.0435 \\ -0.1253 \\ 0.2304 \\ -1.2339 \\ 0.3223 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -2.3028 & -0.0435 & -0.1253 & 0.2304 & -1.2339 & 0.3223 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.42 berikut.

Tabel 4.42: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6

i	$ \lambda_i $
1	0.7995
2	0.6950
3	0.4877
4	0.0526
5	0.3907
6	0.2235

Berdasarkan Tabel 4.42, terlihat bahwa nilai absolut dari nilai eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Selanjutnya, akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dan sub sistem tak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA (A_r, B_r, C_r, D_r) orde 14

seperti yang tertulis pada Lampiran O. Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_r seperti yang disajikan pada Tabel 4.43 berikut.

Tabel 4.43: Nilai Eigen dari sistem tereduksi orde 14

i	$ \lambda_i $
1	0.3868
2	0.1983
3	0.0700
4	0.4968
5	0.8000
6	0.6993
7	1.4000
8	2.2000
9	1.7000
10	1.3000
11	1.2000
12	2.1000
13	2.1000
14	1.5000

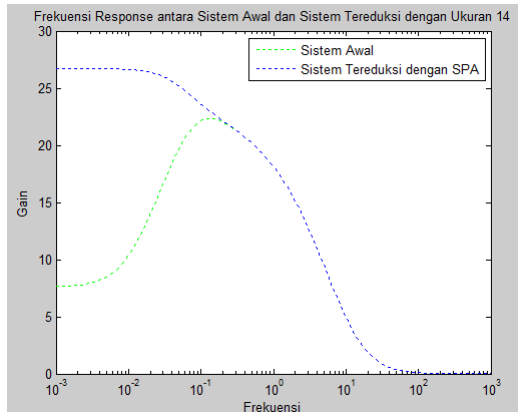
Berdasarkan Tabel 4.43, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_r yang bernilai lebih dari 1 berjumlah 8, maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a,

dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 14. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2010a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah 14. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) adalah teramat.

Berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 14 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA seperti yang disajikan pada Gambar 4.32 berikut.

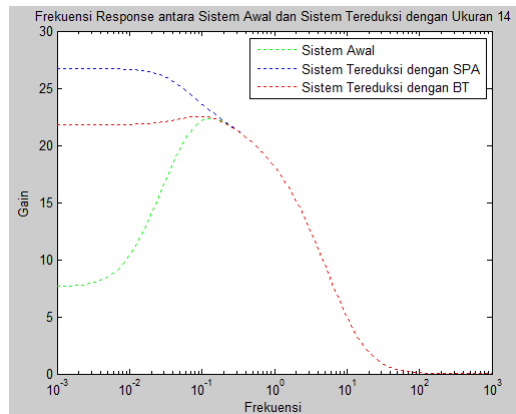


Gambar 4.32: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan SPA terhadap Output

Pada Gambar 4.32, terlihat bahwa sistem awal dengan

sistem tereduksi total orde 14 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 14 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama.

Adapun perbandingan frekuensi respon antara sistem awal dengan sistem tereduksi total orde 14 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA, dan sistem tereduksi total orde 14 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan Pemotongan Setimbang (BT), seperti yang disajikan pada Gambar 4.33 berikut.



Gambar 4.33: Frekuensi Response antara Sistem Awal, Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan SPA, dan Sistem Tereduksi Total Orde 14 dengan BT terhadap Output

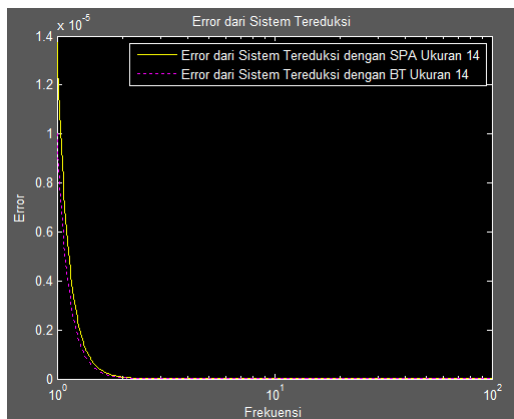
Pada Gambar 4.33, terlihat bahwa sistem tereduksi total orde 14 (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan SPA maupun sistem tereduksi total orde 14 ($A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs}$) dengan BT mempunyai frekuensi respon yang cenderung berbeda dengan sistem awal

(A, B, C, D) pada saat frekuensi rendah.

Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi total dengan menggunakan SPA maupun BT $(A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}, D_{rs})$ orde 14 mempunyai frekuensi respon yang cenderung sama dengan sistem awal (A, B, C, D) .

Error dari Sistem Tereduksi Orde 14

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan SPA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.34 berikut.



Gambar 4.34: Error Sistem Tereduksi Orde 14

Berdasarkan Gambar 4.34, terlihat bahwa nilai error dari sistem tereduksi orde 14 dapat disajikan pada Tabel 4.44 berikut.

Tabel 4.44: Error dari Sistem Tereduksi Orde 14

<i>Frekuensi</i>	<i>SPA</i>	<i>BT</i>
1.0093	1.2732×10^{-5}	9.3017×10^{-6}
100	1.9476×10^{-11}	3.5939×10^{-12}

Berdasarkan Tabel 4.44, dapat dilihat bahwa error dari sistem tereduksi dengan SPA dan sistem tereduksi dengan BT cenderung hampir mendekati sama disegala frekuensi.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Berdasarkan analisis sistem pada Simulasi 1 dan Simulasi 2, dapat disimpulkan bahwa sistem tereduksi akan memiliki sifat yang sama dengan sistem awal yaitu sifat kestabilan (tidak stabil), keterkendalian, dan keteramatan.
2. Berdasarkan simulasi dapat disimpulkan bahwa frekuensi respon untuk sistem tereduksi yang memiliki orde kecil (variabel *state* yang direduksi banyak) dengan metode SPA cenderung sama pada saat frekuensi rendah.
3. Berdasarkan hasil simulasi dari perbandingan error antara sistem tereduksi dengan SPA dan sistem tereduksi dengan BT, disajikan pada Tabel 5.1 berikut.

Tabel 5.1: Perbandingan Error Sitem Tereduksi Berdasarkan Orde dari Sistem Tereduksi terhadap Frekuensi Respon

	Orde Sistem Tereduksi Kecil	Orde Sistem Tereduksi Besar
Frekuensi Rendah	Error SPA < Error BT	Error SPA > Error BT
Frekuensi Tinggi	Error SPA > Error BT	Error SPA \approx Error BT

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya dibahas mengenai sistem awal yang tak stabil, terkendali, dan teramati. Untuk selanjutnya, dapat dikembangkan reduksi model untuk sistem yang tak stabil, tak terkendali, dan tak teramati.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arif, D.K. (2014). *"Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi"*. Disertasi S3. Jurusan Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
- [2] Rochmah, M., Fatmawati. dan Purwati, U.D,. (2015). *"Model tereduksi Sistem Linier Waktu Diskrit dengan Metode Singular Perturbation Approximation"*. Jurnal Matematika. Universitas Airlangga.
- [3] Muscato, G., Nunnari G. dan Fortuna L. (1997). *"Singular Perturbation Approximation of Bounded Real Balanced and Stochastically Balanced Transfer Matrices"*. International Journal Control, vol 66, pp. 253-269.
- [4] Liu, Y. dan Anderson B.D.O. (1989). *"Singular Perturbation Approximation of Balanced System"*. International Journal Control, vol 50, pp. 1379-1405.
- [5] Kumar D, et al. (2011). *"Reduction Of Unstable Discrete Time System by Hankel Norm Approximation"*. International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST), Vol. 3, pp. 2825-2831.
- [6] Khasanah, I.N. (2016). *"Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil"*. Skripsi S1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.

- [7] Ogata, K. (1995). *"Discrete-time Control Systems"*. Canada : Prentice-Hall International, Inc.
- [8] Arif, D.K, et al. (2014). *"Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction"*. International Journal Control and Automation (IJCA), Vol. 7, No.9, pp. 257-270.
- [9] Nagar, S.K, et al. (2004). *"An Algorithmic Approach for System Decomposition and Balanced Realized Model Reduction"*. Journal of the Franklin Institute, Hal. 615630.
- [10] Skogestad,S., Postlethwaite,I. (2001). *"Multivariable Feedback Control Analysis and Design"*. Chichester : John Wiley and Sons.

LAMPIRAN A

Matriks Unitary U_d

[illegible]

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh: $G_t = \frac{U_d^t A U_d}{C^t I_d} = \frac{U_d^t B}{C^t I_d}$, dengan:

[illegible]

$$D_t = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} -1.3780 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 \\ -0.0451 & 0.5526 & 0.5526 & 0.5526 & 0.5526 & 0.5526 \\ 0.2379 & 0.2379 & 0.2379 & 0.2379 & 0.2379 & 0.2379 \\ 1.3647 & 1.3647 & 1.3647 & 1.3647 & 1.3647 & 1.3647 \\ -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 & -0.0451 \\ -0.3813 & -0.3813 & -0.3813 & -0.3813 & -0.3813 & -0.3813 \\ 0.6083 & 0.6083 & 0.6083 & 0.6083 & 0.6083 & 0.6083 \\ -0.8585 & -0.8585 & -0.8585 & -0.8585 & -0.8585 & -0.8585 \\ -0.7571 & -0.7571 & -0.7571 & -0.7571 & -0.7571 & -0.7571 \\ -0.7816 & -0.7816 & -0.7816 & -0.7816 & -0.7816 & -0.7816 \\ -0.5291 & -0.5291 & -0.5291 & -0.5291 & -0.5291 & -0.5291 \\ 0.4112 & 0.4112 & 0.4112 & 0.4112 & 0.4112 & 0.4112 \\ 0.6402 & 0.6402 & 0.6402 & 0.6402 & 0.6402 & 0.6402 \\ -0.4283 & -0.4283 & -0.4283 & -0.4283 & -0.4283 & -0.4283 \\ -0.3750 & -0.3750 & -0.3750 & -0.3750 & -0.3750 & -0.3750 \\ 0.4704 & 0.4704 & 0.4704 & 0.4704 & 0.4704 & 0.4704 \\ -0.7542 & -0.7542 & -0.7542 & -0.7542 & -0.7542 & -0.7542 \end{pmatrix}$$

$$C_l = \begin{pmatrix} -1.7119 & 2.0375 & 1.1627 & 0.3399 & 0.2521 & -1.8820 & -1.1265 & -1.4317 & 0.4401 & -0.7490 & -1.3530 & 1.1578 & 1.8839 & 1.9286 & 1.7191 & -0.5244 & -0.6743 & -0.5409 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Matriks Transformasi W_d

$B_d =$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN C

Subsistem Tak Stabil

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha} = & \begin{pmatrix} 0.5409 & 0.1132 & -0.4068 & 0.7317 & 0.8304 & 0.0968 & 0.4463 & 0.1705 & -1.2120 & -0.0010 & 0.0334 & -0.3977 & 1.4380 \\ -0.4941 & 0.2422 & -0.4579 & -0.3531 & -0.5303 & -0.4480 & -0.4001 & -0.5370 & -0.1994 & -0.4339 & -0.1354 & -0.8969 & 1.5884 \\ 0.0369 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 & -0.0004 \\ -0.6491 & 0.5427 & -0.4481 & 0.1165 & 0.2115 & 0.8005 & 0.5144 & 0.1483 & -0.3158 & -0.8116 & -0.3617 & -0.0609 & -0.2506 \\ -0.3351 & 0.2803 & -0.3868 & -0.1998 & 0.1223 & -0.0679 & 1.6445 & -0.6536 & -0.9693 & -0.8764 & 0.2991 & -0.6738 & -0.9171 \\ -0.9006 & -0.6161 & 0.4448 & -0.2139 & 0.2138 & 0.2030 & -0.6040 & 1.1112 & 0.5906 & 0.4026 & 1.4171 & -2.0750 & -0.7313 \\ 0.0500 & -0.7519 & 0.2496 & -0.7351 & 0.5794 & 0.9176 & -0.2920 & -1.3897 & 0.4484 & -0.1948 & 0.2950 & -0.4699 & -0.2552 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.2602 & -0.1448 & -0.4231 & 0.0751 & -0.1825 & -1.4074 & 0.2650 & 0.3189 & 0.5965 & 0.2138 & 1.0191 & -0.4444 & -0.1965 \\ -0.2798 & 0.3097 & 0.5730 & -0.3814 & -0.5297 & -0.1620 & -1.0669 & 0.9928 & 0.5832 & 0.6281 & 0.7148 & 0.1611 & 0.4634 \\ -0.0251 & 0.0893 & 0.2074 & 0.0610 & -0.2461 & -0.1209 & -0.3973 & 0.3301 & -0.2178 & 0.9875 & -0.5083 & -0.8992 & -1.0469 \\ -0.0953 & -0.3629 & 0.6233 & 0.2247 & -0.6226 & -0.3168 & -0.4422 & 0.3508 & -1.1895 & -0.0551 & 1.0386 & -0.7121 & -0.0577 \\ 0.0841 & 0.9223 & 0.2557 & 0.9002 & -0.8298 & 0.3978 & -0.6099 & -0.6628 & 0.0884 & -1.4675 & 0.3284 & 0.0734 & -0.2543 \end{pmatrix} \\
B_{\alpha} = & \begin{pmatrix} 0.8483 \\ -0.8585 \\ 0.7411 \\ -0.7816 \\ -0.5201 \\ 0.6565 \\ 0.4115 \\ 0.6951 \\ 0.6102 \\ -0.4283 \\ -0.3796 \\ 0.4704 \\ -0.7362 \end{pmatrix} \\
C_{\alpha} = & \begin{pmatrix} -5.4985 & -10.6668 & 2.6550 & 5.0659 & -7.3086 & 6.1915 & 5.2931 & -2.8308 & 5.8926 & 4.9455 & -3.4342 & -0.8562 & 1.2596 \end{pmatrix} \\
D_{\alpha} = & \begin{pmatrix} 0 & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN D

Sistem Tereduksi Total Orde 15

$$\bar{A}_s = \begin{pmatrix} 0.4213 & -0.3553 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8259 & 0.5283 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5410 & 0.1133 & -0.4069 & 0.7317 & 0.8205 & 0.0699 & -0.4464 & 0.1705 & -1.2121 & -0.0011 & 0.0335 & -0.3977 & 1.4380 \\ 0 & 0 & -0.0941 & 0.2422 & 0.4579 & -0.5532 & -0.5064 & -0.4480 & -0.4001 & -0.5370 & 0.1995 & -0.4339 & -0.1355 & -0.8990 & 1.5838 \\ 0 & 0 & 0.2558 & 0.4319 & -0.7338 & -0.2209 & -0.7444 & 0.9006 & -0.1697 & 0.1753 & 0.9920 & -0.4355 & 0.8280 & 0.0590 & -0.2322 \\ 0 & 0 & -0.6491 & 0.5428 & -0.4481 & 0.1166 & 0.2715 & 0.8035 & 0.5144 & 0.1483 & -0.3159 & -0.0817 & -0.3618 & -0.0610 & -0.2507 \\ 0 & 0 & 0.1850 & -0.2505 & 0.4685 & -0.0599 & 0.1273 & 0.3280 & 0.4454 & 0.0594 & 0.0594 & 0.0594 & 0.0594 & 0.0594 & 0.0594 \\ 0 & 0 & -0.8062 & -0.6161 & 0.4468 & -0.2139 & 0.2138 & 0.2031 & 0.2031 & 1.1133 & 0.5907 & 0.4206 & 1.1171 & -2.0753 & -0.7113 \\ 0 & 0 & 0.0531 & -0.7520 & 0.2496 & -0.7352 & 0.5795 & 0.9176 & -0.2920 & -1.3898 & 0.4485 & -0.1949 & 0.2951 & -0.4700 & -0.2582 \\ 0 & 0 & -0.2261 & -0.3612 & 0.5208 & -0.5274 & -0.0113 & 0.2421 & -0.0060 & 0.0570 & 0.6972 & 1.5045 & 0.8094 & 0.1182 & -0.4546 \\ 0 & 0 & -0.2002 & -0.1448 & -0.4232 & 0.0751 & -0.1824 & -1.4074 & 0.2651 & 0.3190 & 0.5966 & 0.2139 & 1.0191 & -0.4445 & -0.1966 \\ 0 & 0 & -0.2798 & 0.1500 & 0.3721 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 & -0.3268 \\ 0 & 0 & -0.0894 & 0.1361 & 0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 & -0.0861 \\ 0 & 0 & -0.0954 & -0.3620 & -0.6233 & 0.2248 & -0.6227 & -0.3169 & -0.4423 & 0.3508 & -1.1896 & -0.0551 & 1.0387 & -0.7121 & -0.0578 \\ 0 & 0 & 0.0841 & 0.0224 & 0.2537 & 0.9002 & -0.8599 & 0.4079 & -0.6099 & -0.6659 & 0.0884 & -1.4676 & 0.3285 & 0.0744 & -0.2543 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_s = \begin{pmatrix} -0.6276 & 2.5102 \\ 0.8484 & -0.8585 \\ 0.8484 & -0.8585 \\ -0.7817 & -0.5201 \\ 0.6565 & 0.4115 \\ 0.6565 & 0.4115 \\ -0.4283 & -0.3796 \\ 0.4704 & -0.7362 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_s = (\ 0.8596 \ 2.4399 \ -5.0586 \ -10.6669 \ 2.0650 \ 5.0659 \ -7.3087 \ 6.1915 \ 5.2932 \ -2.8399 \ 5.8927 \ 4.9455 \ -3.4343 \ -0.8562 \ 1.2596 \)$$

$$\bar{D}_s = (\ -12.1462 \)$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Sistem Tereduksi Total Orde 16

\bar{y}

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN F

Sistem Tereduksi Total Orde 17

γ

3.

$$\vec{C}_+ = \begin{pmatrix} -0.4261 & 0.0306 & -1.7175 & 3.5459 & -10.6609 & 9.3020 & 5.0629 & -7.3087 & 4.1915 & 3.2952 & -2.8369 & 3.8927 & 4.9415 & -0.8452 & 1.2596 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN G

Sistem Tereduksi Total Orde 18

[illegible]

Halaman ini sengaja dikosongkan.

163

[illegible]

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN I

Matriks Unitary U_d (Simulasi 2)

Dengan demikian, dari salap pertama transformasi sistem diperoleh: $G_1 = \left[\frac{U_1^T A U_1}{C U_1} \mid \frac{U_1^T B}{D} \right] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$, dengan:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN J

Matriks Transformasi W_d (Simulasi 2)

[illegible]

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut, $G_d = \left[\frac{W_d^{-1} A_t W_d}{C_t W_d} \mid \frac{W_d^{-1} B_t}{D} \right] = \left[\frac{A_t}{C_t} \mid \frac{B_t}{D} \right]$ dengan:

[illegible]

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN K

Sistem Tereduksi Total Orde 10

$$\vec{A}_b = \begin{pmatrix} -0.5691 & -0.3221 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3222 & 0.1150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 & -2.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_b = \begin{pmatrix} 2.3669 \\ -1.1712 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_* = (\begin{array}{cccccccccccc} 2.3669 & -1.1708 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array})$$

$$\vec{D}_b = (\begin{array}{c} -0.9974 \end{array})$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN L

Sistem Tereduksi Total Orde 11

$$\vec{A}_r = \begin{pmatrix} -0.3776 & -0.4367 & 0.0353 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4367 & -0.1532 & -0.2646 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0353 & -0.2646 & -0.4449 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_r = \begin{pmatrix} -5.1645 \\ 1.6369 \\ 0.0881 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_r = \begin{pmatrix} -1.2911 & 0.2872 & 0.0220 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_r = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN M

Sistem Tereduksi Total Orde 12

$$\vec{A}_r = \begin{pmatrix} -0.3776 & -0.4367 & 0.0353 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4367 & -0.1513 & -0.2822 & 0.0351 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0353 & -0.2822 & -0.2800 & -0.3283 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0.0351 & -0.3283 & -0.3465 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_r = \begin{pmatrix} -5.1645 \\ 1.1478 \\ 0.1004 \\ -0.0245 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_r = \begin{pmatrix} -1.2911 & 0.2869 & 0.0251 & -0.0061 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_r = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN N Sistem Tereduksi Total Orde 13

$$\begin{aligned}
 A_r &= \begin{pmatrix} -0.3776 & -0.4367 & 0.0353 & 0.0001 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4367 & -0.1513 & -0.2822 & 0.0346 & -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0353 & -0.2822 & -0.2785 & -0.3415 & -0.0280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0353 & -0.2785 & -0.3415 & -0.0280 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0005 & -0.0010 & -0.0280 & 0.2459 & -0.4783 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 \end{pmatrix} \\
 B_r &= \begin{pmatrix} -5.1645 \\ 1.1476 \\ 0.1004 \\ -0.0085 \\ -0.0007 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_r &= \begin{pmatrix} -1.2911 & 0.2869 & 0.0251 & -0.0062 & -0.0061 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 D_r &= \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN O

Sistem Tereduksi Total Orde 14

$$\vec{z}_r = \begin{pmatrix} -0.3776 & -0.4367 & 0.0353 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4367 & -0.1513 & -0.2822 & 0.0246 & -0.0012 & -0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0353 & -0.2822 & -0.2785 & -0.3316 & -0.0284 & -0.0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0353 & -0.0005 & 0.0001 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0005 & -0.0012 & -0.0284 & 0.0246 & -0.3316 & -0.0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.0005 & -0.0012 & 0.0353 & 0.3312 & -0.1863 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_r = \begin{pmatrix} -5.1645 \\ 1.1476 \\ 0.1746 \\ -0.0258 \\ -0.0258 \\ -0.0006 \\ 0.0001 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_r = \begin{pmatrix} -1.2911 & 0.2849 & 0.0251 & -0.0062 & -0.0002 & 0.0000 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_r = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN P

Listing Program

```

clear all;
clc;
%% Sistem Awal (A,B,C,D)
n=input('masukkan ukuran matriks A = ');
for i=1:n
    A(i,:)=input(['masukkan elemen matriks A baris ke-'
    ' num2str(i) ' = ']);
end
disp('Matriks A = ');
disp(A);
for i=1:n
    Bro(:,i)=input(['masukkan elemen matriks B kolom
ke-' num2str(i) ' = ']);
end
B=Bro';
disp('Matriks B = ');
disp(B);
for i=1:n
    C(i)=input(['masukkan elemen matriks C kolom ke-'
    num2str(i) ' = ']);
end
disp('Matriks C = ');
disp(C);
D=input('masukkan nilai matriks D = ');
disp('Matriks D = ');
disp(D);
det_A=det(A);
sysAwal=ss(A,B,C,D,1);

%% Menentukan nilai eigen (stabil atau tidak stabil)
[n n0]=size(A); %dimensi matriks A
Eigen_A=abs(eig(A))
%inisiasi, jumlah eigen stabil dan tidak stabil
Tak_Stabil = 0;
Stabil = 0;
Stabil_Asimtotik = 0;
for i = 1:n
    if Eigen_A(i) > 1
        Tak_Stabil = Tak_Stabil +1;
    end
    if Eigen_A(i) == 1
        Stabil = Stabil +1;
    end
end

```

```

end
if Eigen_A(i) < 1
    Stabil_Asimtotik = Stabil_Asimtotik +1;
end
end
Tak_Stabil
Stabil
Stabil_Asimtotik

%% Terkendali
Matriks_Keterkendalian_Sistem_Awal=rank(ctrb(sysAwal))
%% Teramati
Matriks_Keteramatan_Sistem_Awal=rank(observ(sysAwal))
%% Matriks uniter dan Matriks Transformasi,dekomposisi
stabil/tidak stabil A1 stabil, A
% U adalah matriks uniter
% At adalah matriks transformasi
% M adalah jumlah keadaan yang stabil
% A adalah matriks A
% 6 adalah tipe
% 3 adalah state yang stabil
[U,At,Z] = blkrsch(A,6,Stabil_Asimtotik)

%% Solusi Lyapunov  $A(t_{11})S-SA(t_{22})+At_{12}=0$ 
A11=At(1:Z,1:Z);
A22=At(Z+1:n,Z+1:n);
A12=At(1:Z,Z+1:n)*inv(A22);

P=A11;
Q=(inv(A22))';
R=A12;
S=dlyap(P,Q,R);

%% Transformasi tahap kedua yaitu  $x_t=WX$ 
I_m=eye(Z);
I_n=eye(n-Z);
nul =zeros(n-Z,Z);
S;
Wd=[I_m S;nul I_n]
Wi=[I_m -S;nul I_n];

```

```

%% Dekomposisi stabil dan tidak stabil
Bt=U'*B;
Ct=C*U;

Ad=Wi*At*Wd
Bd=Wi*Bt;
Cd=Ct*Wd;
D;
Gd=[Ad Bd;Cd D]

%% Sistem stabil
As=Ad(1:Z,1:Z);
Bs=Bd(1:Z);
Cs=Cd(1,1:Z);
Ds=D;
Gs=[As Bs;Cs D]

%% Subsistem Stabil
sysStabil=ss(As,Bs,Cs,Ds);

%% Kestabilan Sub Sistem Stabil
Eigen_Subsistem_Stabil=abs(eig(sysStabil))

%% Keterkendalian Sub Sistem Stabil
Matriks_Keterkendalian_Subsistem_Stabil=rank(ctrb(sysStabil))
b=rank(ctrb(sysStabil));
%% Keteramatan Sub Sistem Stabil
Matriks_Keteramatan_Subsistem_Stabil=rank(observ(sysStabil))
a=rank(observ(sysStabil));
if(isequal(a,b))
    disp('Rank Matriks Keterkendalian = Rank Matriks
Keteramatan');
else
    errorldg('Rank Matriks Keterkendalian TIDAK SAMA
dengan Rank Matriks Keteramatan','error');
    break;
end

%% Sistem tidak stabil

```

```

Au=Ad(Z+1:n,Z+1:n);
Bu=Bd(Z+1:n);
Cu=Cd(Z+1:n0);
Du=0;
Gu=[Au Bu;Cu Du]

%%
sysunStabil=ss(Au,Bu,Cu,Du,1);
%% Kestabilan Sub Sistem Tak Stabil
Eigen_Subsistem_TakStabil=abs(eig(sysunStabil))

%% Terkendali
Matriks_Keterkendalian_Subsistem_TakStabil=rank(ctrb(sysunStabil))

%% Teramati
Matriks_Keteramatan_Subsistem_TakStabil=rank(observ(sysunStabil))

%% menentukan fungsi transfer dari subsistem stabil
(As,Bs,Cs,Ds)
disp('Fungsi Transfer dari Subsistem Stabil')
(As,Bs,Cs,Ds)
G=tf(sysStabil);
Realisasi_Minimal=order(G)

%% menentukan bentuk realisasi setimbang
[Ab,Bb,Cb]=dbalreal(As,Bs,Cs);
Db=Ds;
sysb=ss(Ab,Bb,Cb,Db,1)
W_gramian = gram(sysb,'c')
M_gramian = gram(sysb,'o')

c=fix(abs(W_gramian));
d=fix(abs(M_gramian));
if(isequal(c,d))
    disp('Gramian Keterkendalian Setimbang = Gramian Keteramatan Setimbang');
else
    error('Gramian Keterkendalian Setimbang TIDAK SAMA dengan Gramian Keteramatan Setimbang','error');

```

```

        break;
    end
    hsv= hsvd(sysb);
    Nilai_Singular_Hankel=hsv

%% Sistem Tereduksi
x=1;
legendA = [];
hold on;
o=1000;

%% inputan r (Orde sistem tereduksi)
[p,o]=size(Ab)
disp(['Masukkan ukuran sistem tereduksi(r) mulai dari
orde 2 sampai ' num2str(p)-1]);
r=input('r=');
%% reduksi model dengan menggunakan metode SPA
rsys=balred(sysb,r)
disp('Fungsi Transfer dari Sistem tereduksi dengan
metode SPA')
G3=tf(rsys)
omr=order(G3);
[AsrS,BsrS,CsrS,DsrS]=ssdata(rsys);

%% kestabilan
Eigen_SPA1=abs(eig(rsys))

%% Terkendali
Rank_Matriks_Keterkendalian_SPA1=rank(ctrb(rsys))

%% Teramati
Rank_Matriks_Keteramatan_SPA1=rank(observ(rsys))

%% Sistem Akhir (Reduksi SPA+Subsistem Tak Stabil)
nul1=zeros(r,Tak_Stabil);
nul2=zeros(Tak_Stabil,r);
ArS=[AsrS nul1;nul2 Au]
BrS=[BsrS;Bu]
CrS=[CsrS Cu]
DrS=[DsrS]

```

```

sysSPA2=ss(ArS,BrS,CrS,DrS,1);
%% kestabilan sistem akhir dengan SPA
Eigen_SPA2=abs(eig(sysSPA2))

%% Terkendali
Rank_Matriks_Keterkendalian_SPA2=rank(ctrb(sysSPA2))

%% Teramati
Rank_Matriks_Keteramatan_SPA2=rank(observ(sysSPA2))

%% reduksi model dengan menggunakan PS
GRED=balancmr(sysb,r);
disp('Fungsi Transfer dari Sistem tereduksi dengan
metode PS')
G2=tf(GRED);
omr=order(G2);
[Asr,Bsr,Csr,Dsr]=ssdata(GRED);

%% kestabilan
Eigen_PS1=abs(eig(GRED))

%% Terkendali
Rank_Matriks_Keterkendalian_PS1=rank(ctrb(GRED))

%% Teramati
Rank_Matriks_Keteramatan_PS1=rank(observ(GRED))

%% Sistem Akhir
nul1=zeros(r,Tak_Stabil);
nul2=zeros(Tak_Stabil,r);
Ar=[Asr nul1;nul2 Au]
Br=[Bsr;Bu]
Cr=[Csr Cu]
Dr=[Dsr]
sysPS2=ss(Ar,Br,Cr,Dr,1);

%%Kestabilan sistem akhir
Eigen_PS2=abs(eig(sysPS2))

%% Terkendali

```



```

Rank_Matriks_Keterkendalian_PS2=rank(ctrb(sysPS2))

%% Teramati
Rank_Matriks_Keteramatan_PS2=rank(observ(sysPS2))

%% Norm
[ta1,tb1]=ss2tf(A,B,C,D,1);
Sistem_Awal=tf(ta1,tb1,1);
[ta2,tb2]=ss2tf(ArS,BrS,CrS,DrS,1);
Sistem_Reduksi_SPA=tf(ta2,tb2,1);
Error1=Sistem_Awal-Sistem_Reduksi_SPA;
NormSPA=norm(Error1,inf)
Error2=Sistem_Reduksi_SPA-Sistem_Awal;
NormSPA=norm(Error2,inf)

[ta3,tb3]=ss2tf(Ar,Br,Cr,Dr,1);
Sistem_Reduksi_PS=tf(ta3,tb3,1);
Error3=Sistem_Awal-Sistem_Reduksi_PS;
NormPS=norm(Error3,inf)
Error4=Sistem_Reduksi_PS-Sistem_Awal;
NormPS=norm(Error4,inf)

%% Grafik
figure(1);
hsv=hsvd(sysb);
xlabel('Order')
ylabel('Nilai Singular Hankel')
plot(hsv,'*')
title('Nilai Singular Hankel')

figure(100+r);
t=logspace(-3,3,200);
[mag,pha]=bode(A,B,C,D,1,t);
[magr,phar]=bode(ArS,BrS,CrS,DrS,1,t);
semilogx(t,20*log10(mag),'g',t,20*log10(magr),'b:');
title(['Frekuensi Response antara Sistem Awal dan  
Sistem Tereduksi dengan Ukuran '
num2str(r+Tak_Stabil)]);
xlabel('Frekuensi')
ylabel('Gain')
legend('Sistem Awal','Sistem Tereduksi dengan SPA');

```

```

figure(r);
t=logspace(-3,3,200);
[mag,pha]=bode(A,B,C,D,1,t);
[magr,phar]=bode(Ar,Br,Cr,Dr,1,t);
[magrs,phars]=bode(ArS,BrS,CrS,DrS,1,t);
semilogx(t,20*log10(mag),'g:',t,20*log10(magrs),'b:',t,
,20*log10(magr),'r:');
title(['Frekuensi Response antara Sistem Awal dan
Sistem Tereduksi dengan Ukuran '
num2str(r+Tak_Stabil)]);
xlabel('Frekuensi')
ylabel('Gain')
legend('Sistem Awal','Sistem Tereduksi dengan
SPA','Sistem Tereduksi dengan BT');

figure(o);
w=logspace(0,2,500);
P=pck(A,B,C,D);
Pr=pck(Ar,Br,Cr,Dr);
Prs=pck(ArS,BrS,CrS,DrS);
Ger=msub(P,Prs);
Ger1=msub(P,Pr);
Gf1=frsp(Ger,w);
Gf2=frsp(Ger1,w);
[u1,s1,v1]=svsd(Gf1);
[u2,s2,v2]=svsd(Gf2);
vplot('liv,m',s1,s2,':');
a = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan SPA Ukuran '
num2str(r+Tak_Stabil)];
b = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan BT Ukuran '
num2str(r+Tak_Stabil)];
legend(a,b);
o=o+1;
x=x+1;
% hold on;
title('Error dari Sistem Tereduksi ')
xlabel('Frekuensi')
ylabel('Error')

figure(Z+1);
t=logspace(-3,3,200);

```

```
[mag, pha]=bode(As,Bs,Cs,Ds,1,t);  
[magr, phar]=bode(Ab,Bb,Cb,Db,1,t);  
semilogx(t, 20*log10(mag), 'b*', t, 20*log10(magr), 'r:')  
title('Frekuensi Response antara Subsistem Stabil dan  
Sistem Setimbang');  
xlabel('Frekuensi')  
ylabel('Gain')  
legend('Subsistem Stabil', 'Sistem Setimbang');
```

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN Q

Biodata Penulis



Penulis bernama Helisyah Nur Fadhilah, biasa dipanggil Helisyah. Penulis dilahirkan di Gresik, 7 Januari 1995. Penulis merupakan putri dari pasangan Nurul Huda dan Mufarochah. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharma Wanita (1999-2000), SDN Kawisanyar(2001-2007), SMPN 2 Gresik(2007-2010), dan SMAN 1 Manyar Gresik(2010-2013). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2013 dengan NRP 1213 100 084. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi di KM ITS sebagai Staff Bidang PSDA Kopma dr.Angka ITS (2014-2015), Staf Dept. Dalam Negeri HIMATIKA ITS (2014-2015), Pemandu Infineight FMIPA ITS (2014-2015), Asisten Bidang Adum Kopma dr.Angka ITS (2015-2016), Kepala Devisi Kajian Strategis Dept. Dalam Negeri HIMATIKA ITS (2015-2016). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai acara kemahasiswaan yaitu GERIGI, OMITS, dan dalam pelatihan kemahasiswaan seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD, dan PP-LKMM.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *helisyah07@gmail.com*